

中央警察大學 108 學年度碩士班入學考試試題

所 別：水上警察研究所

組 別：海洋科技組

科 目：數學

作答注意事項：

1. 本試題共 4 題，每題各占 25 分；共 2 頁。
2. 不用抄題，可不按題目次序作答，但應書寫題號。
3. 禁用鉛筆作答，違者不予計分。

一、有一個 2×2 非零的方陣，存在條件為： $A^2=4A$ ，其推導如下：

(一) $A^2-4A=0$

(二) $A(A-4I)=0$ ，其中 I 為單位矩陣。

(三) $A-4I=0$

(四) 得唯一解 $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

如果上述推導正確，請說明每一步驟的數學根據；如果推導是錯的，請說明原因。

二、求不定積分：

(一) $\int 0 dx$ (5 分)

(二) $\int 2^x dx$ (10 分)

(三) 求在點 $(2,0)$ 的微分 $\frac{dy}{dx}$ 值，其中 $xy = e^y$ (10 分)

三、依題意作答，請詳列計算過程：

(一) 計算下列各題 (每題 5 分)

1、請利用 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 的性質，計算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 7x}$ 。

2、 $\int_1^e (\ln x)^4 x^{-1} dx =$

3、 $\int x \ln x dx =$

(二) 證明下列矩陣為正交，並求出其特徵值。(10 分)

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

四、依題意作答，請詳列計算過程：

(一) 求下列各題之導函數 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ (每題 5 分)

1、 $y = 2e^{-x} + e^{3x}$

2、 $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$

(二) 定義數量 $Q(x)$ 對 x 的變化百分率 (percentage rate of change) 為

$\frac{100Q'(x)}{Q(x)}$ 。現在在海洋中特定區域內某種魚的數量為 $Q(t)$ ，其變化

率為 $\frac{dQ}{dt} = rQ \left(1 - \frac{Q}{a}\right)$ ，其中 r 是該魚種的自然成長率， a 是常數

。求出此魚種的變化百分率。若 $Q(t) > a$ 時，魚種數量之變化情形為何？(15 分)