# 國立中山大學 108 學年度
# 碩士暨碩士專班招生考試試題

**科目名稱：工程數學甲【電機系碩士班甲組、戊組選考、己組】**

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

# 國立中山大學108學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：工程數學甲【電機系碩士班甲組、戊組選考、己組】　　題號：431002

※本科目依簡章規定「可以」使用計算機（廠牌、功能不拘）（混合題）　　共3頁第1頁

**下面 1-12 題為單選題，請選出一個陳述最洽當的選項。每題 3 分，答錯不倒扣，總分 36 分。**

1. 請問函數 $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|},\ t \in (-\infty, \infty)$ 的 Fourier transform 為何?

**(A)** $2/(1+\omega^2)$　**(B)** $\mathrm{e}^{-|\omega|}$　**(C)** $2\cos(\omega)$　**(D)** $1/(1+j\omega)$　**(E)** $1/(1-j\omega)$

2. 已知 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1,1] \\ 0 & t \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$ 的 Fourier transform 為 $\dfrac{2\sin(\omega)}{\omega}$。

請問函數 $y(t) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|t-\tau|} d\tau,\ t \in (-\infty, \infty)$ 的 Fourier transform 為何?

**(A)** $2\sin(2\omega)/\omega$　**(B)** $4\sin(\omega)/(\omega+\omega^3)$　**(C)** $0$　**(D)** $\mathrm{e}^{-|\omega|^2}$　**(E)** $\mathrm{e}^{-|\omega|}/(1+\omega^2)$

3. 定義 Del 操作子為 $\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}$。請問以下敘述何者為錯誤。

**(A)** $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$，其中$\varphi$為具有連續一二偏階導函數的純量場。

**(B)** $\nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{F}) = 0$，其中F為具有連續一二偏階導函數的向量場。

**(C)** $\nabla \cdot (\mathrm{F} \times \mathrm{G}) = \mathrm{G} \cdot (\nabla \times \mathrm{F}) - \mathrm{F} \cdot (\nabla \times \mathrm{G})$，其中F與G為兩個連續平滑的向量場。

**(D)** $\nabla \cdot (\varphi\mathrm{F}) = \nabla\varphi \cdot \mathrm{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathrm{F})$，其中$\varphi$為一連續平滑的純量場而F為一連續平滑的向量場。

**(E)** 以上(a) (b) (c) (d)敘述皆錯誤。

4. 請問閉環積分 $\oint_C x^2y dx - xy^2 dy$ 之值為何，其中$C$為一沿著以下區域邊界之逆時針路徑：$x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$。

**(A)** $-\pi$　**(B)** $\sqrt{2}\pi$　**(C)** $-2\pi$　**(D)** $3\pi$　**(E)** $-2\sqrt{3}\pi$

5. 考慮微分方程式 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + (1 - x(t)^2)x(t) = 0$。請問以下敘述何者為正確。

**(A)** $(\dot{x}, x) = (0,0)$為一區域穩定平衡點。

**(B)** 該微方程式有兩個平衡點。

**(C)** 無論 $(\dot{x}, x)$ 之初值為何，方程式的解皆不發散。

**(D)** 若把方程式的初值乘以 2，所得之新解為初值未放大前之解乘以 2。

**(E)** 以上(a) (b) (c) (d)敘述皆錯誤。

6. 以下關於 Laplace transform（記為：$\mathbb{L}(\cdot)$）的敘述，何者為錯誤。

**(A)** 滿足$\mathbb{L}(f) + \mathbb{L}(g) = \mathbb{L}(f+g)$。

**(B)** 其逆轉換$\mathbb{L}^{-1}(\cdot)$亦滿足$\mathbb{L}^{-1}(f) + \mathbb{L}^{-1}(g) = \mathbb{L}^{-1}(f+g)$。

**(C)** 若$f,\ g$為連續函數，且$\mathbb{L}(f) = \mathbb{L}(g)$，則$f = g$。

**(D)** 以上(a) (b) (c)敘述皆正確。

**(E)** 以上(a) (b) (c) (d)敘述皆錯誤。

7. 以下關於 Laplace transform（記為：$\mathbb{L}(\cdot)$）的敘述，何者為正確。

**(A)** $\mathbb{L}(t^3) = 1/s^3$。

**(B)** 若$a > 0$且$\mathbb{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$，則$\mathbb{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-as}F(s)) = f(t-a)u(t-a)$，其中$u(t)$滿足 $u(t) = 1,\ \forall t \ge 0,\quad u(t) = 0,\ \forall t < 0$。

**(C)** 若$f(0) = 0$，則$\mathbb{L}(\ddot{f}) = s^2\mathbb{L}(f)$。

**(D)** $\mathbb{L}^{-1}(F(s-a)) = \mathrm{e}^{a}\mathbb{L}^{-1}(F(s))$

**(E)** 以上(a) (b) (c) (d)敘述皆正確。

# 國立中山大學108學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：工程數學甲【電機系碩士班甲組、戊組選考、己組】　　題號：431002

※本科目依簡章規定「可以」使用計算機（廠牌、功能不拘）（混合題）　　

**下面第 8 至 12 題所考慮的微分方程式為** $\ddot{z}(t)+a_1\dot{z}(t)+a_0z(t)+\alpha z(t)^3=u(t)$。

8. 假設 $a_1=a_0=\alpha=1$，$u(t)\equiv 0,\ \forall t$。請問以下敘述何者為正確。

(A) 令$z(t)$ 的 Laplace transform 為$Z(s)$。則$Z(s)$滿足$s^2Z(s)+sZ(s)+Z(s)+Z(s)^3=0$。

(B) 該微方程式有三個平衡點。

(C) 對於某些非零的 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解會發散。

(D) 該方程式任何兩組初值的解都會滿足疊加原理。

(E) 以上(a) (b) (c) (d)敘述皆錯誤。

9. 假設 $a_1>0,\ a_0<0,\ \alpha=0$，$u(t)\equiv 0,\ \forall t$。請問以下敘述何者錯誤。

(A) 該方程式為線性方程式。

(B) 對於某些非零的 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解會發散。

(C) 其特徵方程式的解都是負實數。

(D) 對於某些非零的 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解會收斂到零。

(E) 若初值為零，則$z(t)\equiv 0,\ \forall t$。

10. 假設 $a_1=0,\ a_0>0,\ \alpha=0$，$u(t)\equiv 0,\ \forall t$。請問以下敘述何者正確。

(A) 對於任何 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解都會收斂到零。

(B) 對於任何 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解都會發散。

(C) 對於某些非零的 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解收斂到零。

(D) 對於任何 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解都不會發散。

(E) 對於某些非零的 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解會發散。

11. 假設 $a_1>0,\ a_0>0,\ \alpha=0$，$u(t)\equiv 0,\ \forall t$。請問以下敘述何者錯誤。

(A) 對於任何 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解都會收斂到零。

(B) 對於某些非零的 $(\dot{z},z)$ 初值，方程式的解會發散。

(C) 若$a_1^2-4a_0>0$，則所有方程式的解都沒有震盪現象。

(D) 若$a_1^2-4a_0<0$，則所有方程式的解都會有震盪現象。

(E) 若$a_1^2-4a_0=0$，則方程式的解之收斂速度會隨$|a_1|$增大而變快。

12. 假設 $a_1>0,\ a_0>0,\ \alpha=0$，$u(t)=\sin(\omega t)$，且$(\dot{z},z)$ 初值為零。請問以下敘述何者正確。

(A) 方程式的解會收斂到零。　(B) 方程式的解會發散。

(C) 方程式之解的振幅大小不會隨 $\omega$ 而變化。

(D) 方程式的解會趨近一頻率為 $\omega$ 的旋波。

(E) 以上(a) (b) (c) (d)敘述都錯誤。

**第 13 題為計算題，有三個小題，總共 14 分**

13. 考慮微分方程式 $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+\sin(y(t))=u(t)$

(a) (2 分) 令$u(t)\equiv 0$。找出所有讓方程式之解為零的 $(\dot{y},y)$ 初值。

(b) (4 分) 將上述方程式就 $(\dot{y}(0),y(0))=(0,0)$ 與 $(\dot{y}(0),y(0))=(0,\pi)$ 這兩組初值線性化，找出線性化後的微分方程式並討論這兩組方程式之解的收斂性。

(c) (8 分) 考慮上題中初值為 $(\dot{y}(0),y(0))=(0,0)$ 之線性化微分方程式。若該方程式的輸入項為 $u(t)=\begin{cases}1 & t\in[1,2]\\ 0 & t\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)\end{cases}$ 且初值為零，請問方程式之解為何。需詳列計算過程。

背面有題

第14至17題中所有的提問，都不需要寫出推導過程，只要寫出答案即可，答案正確就得分。

14. (15%) Let matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ have its $A_{ref} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) (4%) If $\mathbf{a}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 1]^T$ and $\mathbf{a}_3 = [0 \ \ -4 \ \ 4]^T$, find $\mathbf{a}_2$ and $\mathbf{a}_4$.

(b) (6%) Let $\mathbf{z} = [1 \ \ 2 \ \ \gamma]^T \notin R(A)$. Find all possible values of $\gamma$ such that the distance (in 2-norm) between $\mathbf{z}$ and $N(A^T)$ is $\sqrt{6}$.

(c) (5%) If $\hat{\mathbf{x}} = [3 \ \ 2 \ \ -1 \ \ 1]^T$ solves $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, find the solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ that has the smallest 2-norm.

15. (15%) Consider the vector space $P_3$, the set of all real coefficient polynomials of degree less than 3, the inner product $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ for any $f, g \in P_3$. Denote $S := \{p \in P_3 \mid p(t) = t + c, \ -1 \le c \le 1\}$.

(a) (5%) Describe $S^{\perp}$ as the span of a set of its basis composed of some monic polynomials, i.e. polynomials with 1 as the coefficient of their highest degrees.

(b) (5%) Describe $(S^{\perp})^{\perp}$.

(c) (5%) What is the orthogonal projection of $p(t) := t^2 - t + 1$ onto the subspace $(S^{\perp})^{\perp}$?

16. (10%) Let $f(z) = z^{(-1+i)^i}$ and $C$ be the positively oriented unit circle $|z| = 1$, and we'd like to compute the contour integral $\int_C f(z)\,dz$.

(a) (4%) Let's denote the complex number $(-1+i)^i$ as $\exp(a+ib)$ with $a, b \in \mathbb{R}$. What are $a$ and $b$?

(b) (6%) Since $f(z)$ is a multiple-valued function, let's consider the branch $|z| > 0$ and $0 < \arg z < 2\pi$. When denoting $M := (-1+i)^i$, please use $M$ to express $\int_C f(z)\,dz$.

17. (10%) Use residues to compute the following improper integrals.

(a) (5%) Compute $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

(b) (5%) Compute $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$.