- 請於考試答案紙上依序回答以下所有問題(佔分比重標示於[ ]內)，請清楚標示題號，並且務必詳列解題過程。
- 請勿使用任何參考資料、計算工具。

線性代數與常微分方程式[30%]

1. 給定常微分方程式(ordinary differential equation) $y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=r(t)$，請回答以下問題：
   (a) 若 $a_2=-2$、$a_1=-1$、$a_0=2$ 且上述為一齊次(homogeneous)微分方程式，請求取 $y(t)$ 的通解(general solution)。**[5%]**
   (b) 若原題之非齊次 ODE 可轉化成一個一階常微分方程組(a system of first-order ODEs)，即 $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}+\mathbf{R}$ 的向量型態(vector form)，請寫出 **Y**、**A** 與 **R**。**[5%]**
   (c) 承(b)，若 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 為 **A** 的列向量(row vector)且此三個向量線性獨立(linearly independent)，請說明係數 a_0、a_1 與 a_2 的情形。**[5%]**
   (d) 承(b)，若 $a_2=a_1=a_0=1$，請求 **A** 的所有特徵值(eigenvalue)及其和 Π。**[5%]**
   (e) 承(d)，若 **A** 的逆矩陣(inverse)其中一個特徵值恰巧等於 Π，請求此特徵值相對應的特徵向量(eigenvectors)。**[5%]**
   (f) 承(d)，若 **A** 可分解成 **S** 與 **K** 的和，其中 **S** 為對稱(symmetric)矩陣、**K** 為反對稱(skew-symmetric)矩陣，請求出 **S** 的所有特徵值的和 S 與 **K** 的所有特徵值的和 K。**[5%]**

積分轉換[25%]

2. 給定常微分方程式 $y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=r(t)$，請回答以下問題：
   (a) 若我們可以定義一個積分轉換(integral transform) $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$，且令 $\hat{y}(\omega)$ 與 $\hat{r}(\omega)$ 分別代表 $y(t)$ 與 $r(t)$ 的轉換，請寫出 $\hat{y}(\omega)$ 的方程式。**[5%]**
   (b) 若另一積分轉換 $F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ 可被定義，且 $Y(s)$ 與 $R(s)$ 分別為 $y(t)$、$r(t)$ 的轉換，請寫出 $Y(s)$ 的方程式。**[5%]**
   (c) 承(b)，若給定係數 $a_2=1$ 與 $a_1=a_0=0$，$r(t)=\delta(t-1)$、δ 為函數(Dirac delta function)，且初始條件(initial condition)為 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$，請求出 $Y(s)$。**[5%]**
   (d) 承(c)，請求取 $y(t)$。**[10%]**

級數表示[20%]

3. 考慮以級數(series)表示函數，請回答以下問題：
   (a) 請利用冪級數解法(power series method)求解初始值問題(initial-value problem)：$y''(x)-2xy'(x)+y(x)=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$。**[10%]**
   (b) 假設對於一個週期 2π 的函數 $f(x)$ 我們可以定義一個級數表示 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，請將此級數表示延伸後找出以下函數的相對應級數：$g(x)=x-L$，$-L<x<L$。**[10%]**

向量分析[25%]

4. 請回答以下向量微積分相關問題：
   (a) 給定 T 是三維空間中的一個體積且其為緊緻空間(compact space)並由一個片段光滑(piecewise smooth)的閉曲面 S 所圍成，請計算 $\iint_S \vec{n}dA$，其中 $\vec{n}$ 為 S 的單位法向量(unit normal vector)。**[10%]**
   (b) 給定向量函數(vector function) $\vec{F}=\frac{1}{3}\left[z^3,y^3,x^3\right]$ 以及封閉曲線(closed curve) C: $x^2+y^2=1,\ z=1$，請計算 $\vec{F}$ 沿著 C 的積分。**[5%]**
   (c) 已知 $\vec{u}\cdot\operatorname{curl}\vec{v}-\vec{v}\cdot\operatorname{curl}\vec{u}=\operatorname{div}(\vec{w})$，請計算 $(\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{u}$。**[5%]**
   (d) 給定向量場(vector field) $\vec{u}=[x,y,z]$，請寫出此函數在曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的法線方向之分量。**[5%]** **[試題結束]**

試題隨卷繳回