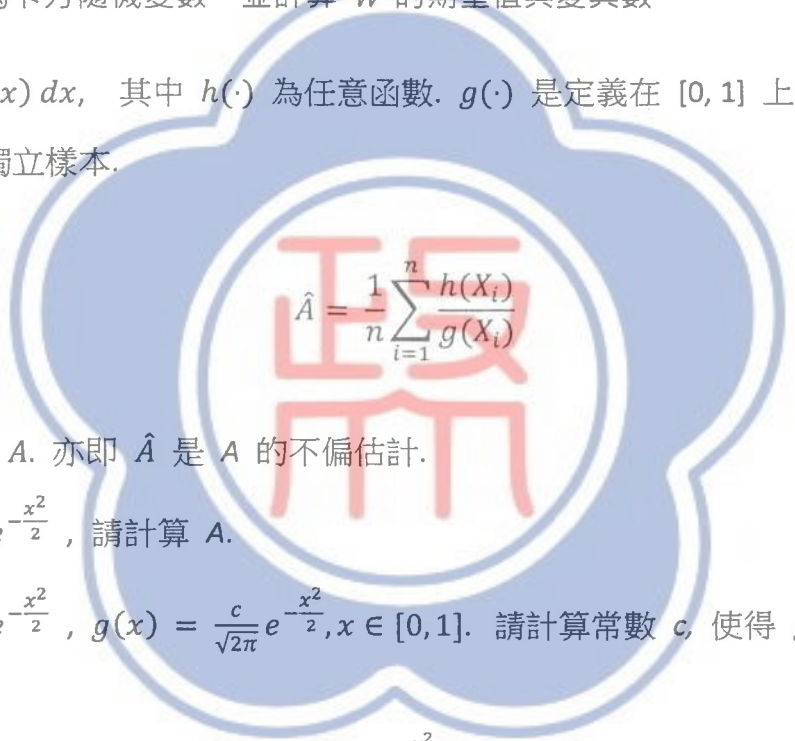


考 試 科 目	統計學	系 所 別	風險管理與保險學系/精算科學組	考 試 時 間	2 月 18 日(一) 第 3 節
---------	-----	-------	-----------------	---------	-------------------

假設  $\Phi(\cdot)$  是標準常態分配的累計分配函數. 所以  $\Phi(1) = 0.8413$  ( $\Phi^{-1}(0.8413) = 1$ ) 和  $\Phi(2) = 0.9772$  ( $\Phi^{-1}(0.9772) = 2$ ).  $\pi = 3.14159$ .  $\log$  是自然對數函數

1. (30%) 假設  $Z$  是標準常態隨機變數,  $U = \Phi(Z)$ ,  $X = -2 \log(\Phi(Z))$ ,  $W = Z^2$ 
  - a. 請證明  $U$  為均勻隨機變數, 並計算  $U$  的期望值與變異數。
  - b. 請證明  $X$  為指數隨機變數, 並計算  $X$  的期望值與變異數。
  - c. 請證明  $W$  為卡方隨機變數, 並計算  $W$  的期望值與變異數。
  
2. (40%) 令  $A = \int_0^1 h(x) dx$ , 其中  $h(\cdot)$  為任意函數.  $g(\cdot)$  是定義在  $[0, 1]$  上的密度函數.  $X_1, \dots, X_n$  是從  $g$  抽樣出來的獨立樣本.
 



$$\hat{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h(X_i)}{g(X_i)}$$

  - a. 請證明  $E[\hat{A}] = A$ . 亦即  $\hat{A}$  是  $A$  的不偏估計.
  - b. 假設  $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 請計算  $A$ .
  - c. 假設  $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $g(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in [0, 1]$ . 請計算常數  $c$ , 使得  $g(\cdot)$  是定義在  $[0, 1]$  上的密度函數.
  - d. 假設  $X_1, \dots, X_n$  是從上式 c.  $g(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  抽樣出來的獨立樣本. 請問  $n$  要取多大才能讓  $\hat{A}$  的標準誤小於 0.01?
  
3. (30%)  $X = (X_1, X_2, X_3)$  為多元常態隨機向量. 其共變異數矩陣為

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

共變矩陣的特徵值與特徵向量分別為

考試科目	統計學	系所別	風險管理與保險學系/精算科學組	考試時間	2月18日(一)第3節
------	-----	-----	-----------------	------	-------------

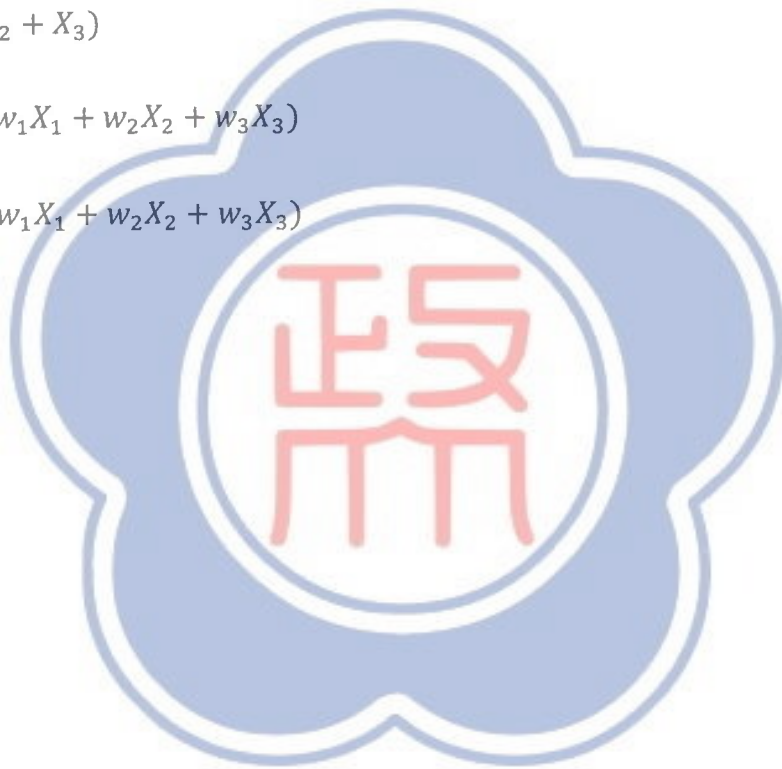
$$\lambda_1 = 5.0489, q_1 = (0.328, 0.591, 0.737)^T;$$

$$\lambda_2 = 0.6431, q_2 = (0.737, 0.328, -0.591)^T;$$

$$\lambda_3 = 0.308, q_3 = (0.591, -0.737, 0.328)^T;$$

$w = (w_1, w_2, w_3)$  是單位向量 (亦即  $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ )

- 計算  $\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$
- 求解  $\max_w \text{Var}(w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3)$
- 求解  $\min_w \text{Var}(w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3)$



備

註

- 作答於試題上者，不予計分。
- 試題請隨卷繳交。