國立政治大學 108 學年度 碩士暨碩士在職專班 招生考試試題

考 試 科 目	統計學	系 所 別	風險管理與保險學系/精算科學組	考 試 時 間	2 月 18 日(一) 第 3 節

假設 $\Phi(\cdot)$ 是標準常態分配的累計分配函數. 所以 $\Phi(1) = 0.8413$ $(\Phi^{-1}(0.8413) = 1)$ 和 $\Phi(2) = 0.9772$ $(\Phi^{-1}(0.9772) = 2)$. $\pi = 3.14159$. log 是自然對數函數

1. (30 %) 假設 Z 是標準常態隨機變數，$U = \Phi(Z)$，$X = -2\log(\Phi(Z))$，$W = Z^2$

   a. 請證明 U 為均勻隨機變數，並計算 U 的期望值與變異數。

   b. 請證明 X 為指數隨機變數，並計算 X 的期望值與變異數。

   c. 請證明 W 為卡方隨機變數，並計算 W 的期望值與變異數。

2. (40%) 令 $A = \int_0^1 h(x)\,dx$, 其中 $h(\cdot)$ 為任意函數. $g(\cdot)$ 是定義在 [0, 1] 上的密度函數。 $X_1, \ldots, X_n$ 是從 g 抽樣出來的獨立樣本.

$$\hat{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{h(X_i)}{g(X_i)}$$

   a. 請證明 $E[\hat{A}] = A$. 亦即 $\hat{A}$ 是 A 的不偏估計.

   b. 假設 $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, 請計算 A.

   c. 假設 $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $g(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in [0,1]$. 請計算常數 c, 使得 $g(\cdot)$ 是定義在 [0, 1] 上的密度函數.

   d. 假設 $X_1, \ldots, X_n$ 是從上式 c. $g(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 抽樣出來的獨立樣本. 請問 n 要取多大才能讓 $\hat{A}$ 的標準誤小於 0.01?

3. (30%) $X = (X_1, X_2, X_3)$ 為多元常態隨機向量。其共變異數矩陣為

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

共變矩陣的的特徵值與特徵向量分別為

考試科目	統計學	系所別	風險管理與保險學系/精算科學組	考試時間	2月18日(一) 第3節

$$\lambda_1 = 5.0489,\ q_1 = (0.328, 0.591, 0.737)^T;$$

$$\lambda_2 = 0.6431,\ q_2 = (0.737, 0.328, -0.591)^T;$$

$$\lambda_3 = 0.308,\ q_3 = (0.591, -0.737, 0.328)^T;$$

$w = (w_1, w_2, w_3)$ 是單位向量 (亦即 $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$)

a. 計算 $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$

b. 求解 $\max\limits_{w} \mathrm{Var}(w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3)$

c. 求解 $\min\limits_{w} \mathrm{Var}(w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3)$

備註	一、作答於試題上者，不予計分。 二、試題請隨卷繳交。