

國立高雄大學 107 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

一、 選擇題(可複選)

1. (5%)下列對函數 $f(x) = \sin(x)$ 的敘述何者為真：

(1) $f(x); x \in (-\infty, \infty)$ 上連續可微； (2) $f(x); x \in (-\infty, \infty)$ 上為一對一映成函數(one one onto function)； (3)其反函數 $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在； (4) 以上皆非。

2. (5%)若函數 $f(x)$ 於 $(-\infty, \infty)$ 連續，則下列敘述何者為真：

(1) $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(x) dx$ ； (2) $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_{-c}^0 f(x) dx$ ；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$ ； (4) 以上皆非。

3. (10%)下列無限級數何者收斂：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{2n^2+4}$ ； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{2\sqrt{n^5+3}}$ ； (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n^3+1}}$ ，其中 $\log(e) = 1$ ； (4)以上皆非。

二、 是非題

1. (5%)若一上升數列(increasing sequence)有上界 M，則該數列必收斂至 M。

2. (5%)考慮一有理數集合 $\{x \in Q | x^2 < 5\}$ ，則該集合有最小上界。

3. (5%)若數列 $\{a_n\}$ 收斂，則對任意連續函數 f ， $f(a_n)$ 必收斂。

4. (5%) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \{c_n + a_n\}$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 。

5. (5%) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \{c_n + a_n\}$ 發散，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{c_n + a_n\} \neq 0$ 。

三、 問答與計算題

國立高雄大學 107 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

1. 考慮兩正常數 $a > b > 0$ ，令 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ 和 $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $n \geq 0$ 分別代表算術平均數與幾何平均數，其中 $a_0 = a, b_0 = b$ 。證明：

(1) (5%) $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ 。

(2) (5%) 數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 收斂。

(3) (5%) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

2. (1) (5%) 證明若 f 與 g 互為反函數，且 f 可微，則對使得 $f'(g(x))$ 非零之 x 值， $g'(x)$ 存在

且 $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 。

(2) (5%) 試利用上式求 $f(x) = \exp(x); x \in (-\infty, \infty)$ 反函數 $g(x) = \log(x); x \in (0, \infty)$ 之導數。

3. 試討論並求下列積分式：

(1) (15%) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx; p \geq 0$;

(2) (15%) $\int \sin^4(x) \cos^2(x) dx$ 。