國立高雄大學 107 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

1. （15 分） 設 (X,Y) 之聯合機率密度函數為 $f(x,y)=1$，$0<x<1$， $x<y<x+1$。試求：(a) $E(Y)$；(b) $E(\mathrm{Y} \mid \mathrm{X})$；(c) (X,Y) 的相關係數。

2. （20 分） 令一連續型隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x)=\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}$，$\alpha>0$， $\beta>0$， $x>0$，一離散型隨機變數 Y 的機率密度函數為 $P(Y=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$， $\lambda>0$，$k=0,1,\ldots$。
   (a) 試證當 $\lambda=x/\beta$ 時，$\mathrm{P}(X\leq x)=P(Y\geq\alpha)$，$x>0$；
   (b) 試說明(a)小題中等式所代表的直觀意義。

3. （10 分）設隨機變數 X_n 有 χ_n^2 分佈（即自由度為 n 之卡方分佈），試證明 X_n/n 機率收斂至 1。

4. （15 分）設 X 有 $N(\mu,\sigma^2)$ 分佈，且設 μ 之先驗分佈為 $N(\theta,\tau^2)$ ，其中 $\sigma>0$、$\theta\in R$ 且$\tau>0$，皆假設為已知。試求：(a) μ 之後驗分佈；(b) μ 之貝氏估計量。

5. （20 分）設 $X_1,\ldots,X_n$ 為一組由 $N(\mu,\sigma^2)$ 分佈所產生的隨機樣本，其中 σ^2 為已知，則
   (a) 欲檢定 $H_0\colon\mu=\mu_0$ vs $H_1\colon\mu\neq\mu_0$，其中 μ_0 為一定值，其概似比檢定（LRT）為何？
   (b) 試給出一個 μ 的 95% 信賴區間。

6. （20 分）設 $X_1,\ldots,X_n$ 為一組由 $Ber(p)$ 分佈所產生的隨機樣本，$0<p<1$。
   (a) 試應用中央極限定理給出一個 p 的 95% 信賴區間；
   (b) 試利用(a)小題的結果，計算在進行民調時，若在 95%的信心水準下，應至少收集幾個有效樣本，才能使抽樣誤差在 ±3 個百分點以內？