國立彰化師範大學107學年度碩士班招生考試試題

系所：物理學系(甲組選考乙)、光電科技研究所(選考乙)　　　　科目：工程數學

☆☆請在答案紙上作答☆☆　　　　共 1 頁，第 1 頁

1. 求解以下微分方程式：　(20%)

   (1) $xy' = y + 2$,　(2) $x^2 y' + 3xy = 1$,　(3) $y'' + y' - 2y = x^2 + 1$,　(4) $2yy'' = y'^2$ 。

2. 已知矩陣 $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, (1) 求出矩陣 A 本徵值(eigenvalues)與本徵向量(eigenvectors)。

   (2) 將矩陣 A 對角化。　(15%)

3. 有一週期為 2π 的週期函數 $f(x)$，已知在 $-\pi \le x \le \pi$ 的區間內，$f(x) = x^2$ 。

   (1) 將週期函數 $f(x)$ 展開成傅立葉級數(Fourier series)。

   (2) 利用(1)的結果，求出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 之值。　(15%)

4. (1) 假設函數 $f(t) = te^{-2t}\cos(3t),\ t \ge 0$，求 $f(t)$ 的拉式轉換(Laplace transform)。

   (2) 使用拉式轉換(Laplace transform)法，求解二階常微分方程式

   $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 4t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1 \text{ 。}$$　(20%)

5. (1) 若 $z = x + iy$ 代表複數變數，其中 $i = \sqrt{-1}$，且函數 $f(z) = z^3 + z + 1$ 可以表示成 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，求實數函數 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 。

   (2) 利用殘數定理(Residue theorem)計算定積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2}\, dx$ 。　(20%)

6. 求一階偏微分方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = \sin x$ 的解。　(10%)