作答須知：請註明每大題及每小題之題號。

1. (20%) 求解 $\frac{dy}{dt}=4y-y^2$，且 $y(0)=1$。[Hint:令 $u=y^{-1}$，解出 u 之後再求 y]

2. 考慮下列聯立一階常微分方程組：$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^T$ (上標 T 為轉置符號)，且 $\mathbf{A}$ 為 $n\times n$ 的常數方陣。若令初始條件，$\mathbf{x}(t=0)=[v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n]^T=\mathbf{v}$，則利用 Laplace transform，$\mathbf{x}$ 的解可表示為 $\mathbf{x}(t)=\left\{L^{-1}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)\right\}\mathbf{v}$，其中 $n\times n$ 的方陣 $\mathbf{B}=s\mathbf{I}-\mathbf{A}$，$\mathbf{B}^{-1}$ 為 $\mathbf{B}$ 的逆矩陣，$\mathbf{I}$ 為 $n\times n$ 的單位方陣(identity matrix)，s 為 Laplace 變數，L^{-1} 則為 Laplace 逆轉換的符號。 現考慮下列一階常微分方程組：$\begin{matrix} x_1'=-2x_1+6x_2 \\ x_2'=-2x_1+5x_2 \end{matrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} x_1(t=0) \\ x_2(t=0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$。
   (a) (10%) 寫出方陣 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$。
   (b) (10%) 以 Laplace 變數表示 $\mathbf{B}^{-1}$。
   (c) (10%) 解出 $\mathbf{x}(t)$。

3. 考慮 3 度空間中的向量場：$\mathbf{F}(x,y,z)=y^2z\mathbf{i}+2xyz\mathbf{j}+\left(2z+xy^2\right)\mathbf{k}$，以及一螺旋線(helix)：$\mathbf{r}=\cos(t)\mathbf{i}+\sin(t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k},\ 0\le t\le 2\pi$，求：
   (a) (10%) 對應此向量場的勢能函數(potential function) $\phi(x,y,z)$。
   (b) (10%) 計算 $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$，其中 A 與 B 為螺旋線上的兩點，且 $A=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}\right)$，$B=(-1,0,3\pi)$。
   (c) (10%) 令螺旋線上 C 點為 $\left(0,1,\frac{3\pi}{2}\right)$，計算 $\nabla\phi$ 投影在 C 點單位切線向量的大小。

4. (20%) 計算下列函數的傅立葉積分：$f(x)=\begin{cases} \pi\ , & |x|<2 \\ 0\ , & otherwise \end{cases}$