

# 國立交通大學 107 學年度碩士班考試入學招生試題

科目：機率論(4082)

考試日期：107 年 2 月 1 日 第 2 節

系所班別：統計學研究所 組別：統計所

第 1 頁, 共 1 頁

【不可使用計算機】\*作答前請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證之所組別與考科是否相符!!

1. 令  $X$  的機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) (10%) 求  $C$ .

(b) (10%) 求  $P\{X > 1\}$ .

2. 令  $X, Y$  獨立。假設  $X$  出自期望值為  $\lambda_1$  的普瓦松分布 (Poisson distribution)，而  $Y$  出自期望值為  $\lambda_2$  的普瓦松分布。

(a) (10%) 試證明  $X + Y$  服從期望值為  $\lambda_1 + \lambda_2$  的普瓦松分布。

(b) (10%) 給定  $X + Y = n$  下，試證明  $X$  的條件分佈服從二項式分配，並求此分配的參數。

3. 假設我們有公正硬幣一枚 (正面出現機率 = 0.5)。

(a) (10%) 試敘述中央極限定理 (central limit theorem)。

(b) (10%) 假設我們丟此公正硬幣 40 次。試以中央極限定理估計其中出現 20 次正面的機率。

註：請以  $\Phi(\cdot)$  表示標準常態分佈的累積機率分佈 (c.d.f.)。請記得作連續性校正 (continuity correction)。

4. 令  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  為獨立且具相同分配 (i.i.d.) 的隨機變數，且  $EX_1 = \mu \in \mathbb{R}$ 。

(a) (10%) 試敘述弱大數法則 (weak law of large numbers)。

(b) (10%) 假設我們有  $EX_1^2 < \infty$ 。試證明弱大數法則。

5. 令  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  獨立且具相同分配 (i.i.d.) 的隨機變數， $EX_1 = \mu$ ，且  $E|X_1| < \infty$ 。一個取值為正整數的隨機變數  $N$  被稱為 *stopping time*，若且唯若對於所有正整數  $n$ ，事件  $\{N = n\}$  獨立於  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ 。

現在假設  $N$  是一個 *stopping time*，並令

$$I_i = \begin{cases} 1, & i \leq N \\ 0, & i > N \end{cases}$$

對於所有正整數  $i$  都成立。

(a) (10%) 試證明  $X_i$  與  $I_i$  獨立。

(b) (10%) 假設  $EN < \infty$ 。試證明  $E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = EN \times EX_1$ 。

提示： $\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_i$ 。