1. 若 $y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$，求下列微分方程式之通解(各 10%)：
   (a) $y+\left(2xy-e^{-2y}\right)y'=0$
   (b) $y''-2y'+y=e^x\ln x$，$x>0$

2. 一粒子在平面上於時間 t 之位置向量為 $\underline{X}(t)$，且其運動方程式為 $\dfrac{d^2\underline{X}}{dt^2}+2\dfrac{d\underline{X}}{dt}-3\underline{X}=0$。已知速度 $\underline{V}=\dfrac{d\underline{X}}{dt}$，開始觀測時粒子之初始位置為 $\underline{X}(0)=(5,0)$、初速度為 $\underline{V}(0)=(1,4)$。
   (a) 請求解此粒子之運動軌跡隨時間之變化，$\underline{X}(t)=(x(t),y(t))$。(10%)
   (b) 請約略畫出其運動軌跡，分別標明粒子在 $t\to-\infty$ 與 $t\to\infty$ 時之軌跡漸近線，並決定粒子之 x 座標極值發生的時間與位置座標。(10%)

3. 若 $y'=\dfrac{dy}{dt}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}$，使用拉普拉斯變換(Laplace transform)求解以下微分方程式，並將其解以 $g(t)$ 表示(10%)：
   $y''+4y'+4y=g(t)$，$y(0)=2$，$y'(0)=-3$

4. 若 U 為 x 與 t 的函數，U=$U(x,t)$。分別以(a)變數分離(separation of variables)法(25%)，與(b)拉普拉斯變換(Laplace transform)法(25%)求解下述偏微分方程：
   $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \ 0<x<1,\ \ 0<t$
   $U(x=0,t)=1,\ \ 0<t$
   $U(x=1,t)=1,\ \ 0<t$
   $U(x,t=0)=1+\cos(\pi x),\ \ 0<x<1$

試題隨卷繳回