

※ 注意：請於試卷內之「非選擇題作答區」標明題號依序作答。

請寫出您的計算過程

1. 給一向量場(Vector field)  $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ ,

(a) 試證  $\vec{F}$  為一保守場(conservative field). (5%)

(b) 試求  $\vec{F}$  沿任一連接點  $A(1, 6, 5)$  與點  $B(-2, -5, 4)$  的平滑曲線(smooth curve)

$C$  所做的功(work)  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . (10%)

2. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$ , 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ . (15%)

3. 試解下列初始值(initial-value)問題. (20%)

(a)  $\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = \cos^2 y$ ,  $y(4) = \pi/4$

(b)  $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 4xy = 2x$ ,  $y(0) = 2$

4. 試解下列常微分方程式. (15%)

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^x - 20\cos 2x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

5. 試求下列常微分方程組的實數解. (15%)

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y$$

6. 請利用分離變數法(separation of variables)解下列偏微分方程式. (20%)

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin(10x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

試題隨卷繳回