Part I: 單選題。每題4分

1. 下列何者不是可分離變數(separable)微分方程式？(a) $(x-y-1)y'=(x+y+1)$; (b) $e^{x+y}y'=x^3\cos(2x)$; (c) $\ln(y^{xy})y'=2x^2y$; (d) $[\cos(x-y)-\sin(x+y)]y'=\cos(2x)$.

2. 下列何者是正合(exact)微分方程式？(a) $xy'=y$; (b) $y'=\cot x\cot y$; (c) $e^{xy}y'=xy$; (d) $x^2y'=\cos y$.

3. 若利用待定係數法(method of undetermined coefficients)，則 $y''+y=\sin x$ 的特殊解(particular solution)形式為何？(a) $a\sin x$; (b) $a\sin x+b\cos x$; (c) $ax\sin x$; (d) $x(a\sin x+b\cos x)$，其中 a 和 b 為待定係數。

4. 求 $\int_{-\infty}^{\infty}[H(t)-H(t-1)][H(t-2)-H(t-3)]dt=?$ (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3。$H(t)$ 為Heavisize (step)函數。

5. 令 $f(t)=t^4$。則 $f(t)$ 之拉氏轉換(Laplace transform)為何？(a) s^5; (b) $24s^5$; (c) s^{-5}; (d) $24s^{-5}$.

Part II: 計算題。每題10分

1. 證明線性(linear)微分方程式 $(-x+e^y)y'=y$ 的積分因子(integrating factor)為 y，並求其解。

2. 求微分方程式 $y''+3y'+2y=e^x$ 的解。

3. 令 $F(s)=\dfrac{2}{s^3-s^2+s-1}=\dfrac{A}{s-1}+\dfrac{Bs+C}{s^2+1}$。求常數 $A,\ B$ 和 C，並求 $F(s)$ 之反(inverse)拉氏轉換。

4. 利用Gram-Schmidt 正交化程序，將三維度向量空間的一個基底(basis) $B=\{<1,1,2>,<0,2,3>,<0,1,1>\}$ 轉化為正範(orthonormal)基底 W。

5. 考慮向量集合 $V=\{\langle a_1,a_2\rangle | a_2=3a_1+1\}$，$a_1$ 為任意實數。定義 V 中向量的加法(addition of vectors)為 $\langle a_1,a_2\rangle+\langle b_1,b_2\rangle=\langle a_1+b_1,a_2+b_2\rangle$，以及純量乘法(scalar multiplication)為 $k\langle a_1,a_2\rangle=\langle ka_1,ka_2\rangle$。決定是否集合 V 中的向量滿足(1)加法封閉性、(2)乘法封閉性。

6. 曲線 C 的位置向量給定為 $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\dfrac{2}{3}t^3\mathbf{k}$。求(1)曲線 C 在 $t=\sqrt{3}$ 處的切線參數式，(2) 曲線 C 在區間 $0\le t\le\sqrt{3}$ 的弧長。

7. 考慮函數 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2-y^2}{z^2}$。(1)求函數 $F(x,y,z)$ 在點 $P(2,4,-1)$ 往點 $Q(3,2,0)$ 看過去的方向導數，(2)函數 $F(x,y,z)$ 在點 $P(2,4,-1)$ 處往哪個方向增加最快？此最大增加率為何？

8. 求線積分 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$，其中，向量場 $\mathbf{F}=\langle z,x,y\rangle$，曲線 C 為柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $x+z=2$ 的交集。曲線 C 的方向為從曲線 C 上方往下看為逆時針方向。