

# 大同大學 100 學年度研究所碩士班入學考試試題

考試科目：工程數學

所別：機械工程研究所

第 全 頁

註：本次考試 不可以參考自己的書籍及筆記； 不可以使用字典； 不可以使用計算器。

1. (6%) 驗證給定函數是否構成微分方程式在指定區間的基本解集合(Fundamental set of solutions)

$$y'' - 2y' + 5y = 0; e^x \cos 2x, e^x \sin 2x, (-\infty, \infty)$$

2. (10%) 試解初值問題

$$2y'' + y' - y = x + 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

3. (6%) 試求一函數  $M(x, y)$  使得下列微分方程式為正合(Exact)

$$M(x, y) dx + \left( xe^{-xy} + 2xy + \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

4. (8%) 試求下列微分方程式的通解

$$(x+1)y' + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

5. (8%)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  求  $\mathbf{A}^{-1}$

6. (12%)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$  求  $\mathbf{A}$  的特徵值(eigenvalues)及特徵向量(eigenvectors)

7. (10%) 請證明  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$  (請注意如果  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  則  $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ )

8. (5%) 求解  $\frac{1+s}{s^2-4s}$  的逆拉普拉斯轉換(inverse Laplace transform).

9. (10%) 求解滿足下列積分方程式之函數  $f(t)$

$$f(t) = 2t^2 + \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

10. (10%) 求解函數  $f(x)$  之傅立葉級數(Fourier series).

$$f(x) = 5x - \cos(3x), -\pi \leq x \leq \pi.$$

11. (15%) 求解邊界值問題(boundary value problem)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ for } 0 \leq x \leq 3, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, u(3, t) = 0 \text{ for } t > 0$$

$$u(x, 0) = x + 2 \text{ for } 0 < x < 3.$$