中原大學 100 學年度 **碩士班** 入學考試

3 月 19 日 15:30~17:00　　應用數學系統計組　　誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目：統計　　（共 1 頁第 1 頁）

□可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者　　□不可使用計算機

一、填充題: 請在答案紙上畫此表格, 再將答案填入。(每格7分)

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

1. 令 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10} \overset{iid}{\sim}$ Bernoulli(p); 即 $\Pr(Y_i = 1) = p; \Pr(Y_i = 0) = 1 - p$。考慮檢定 $\mathrm{H}_0 : p \leq \frac{1}{2}$ vs $\mathrm{H}_1 : p > \frac{1}{2}$, 若此檢定的棄卻域 (critical region, rejection region) 爲 $\mathcal{C} = \{(y_1, y_2, \cdots, y_{10}) : \sum_{i=1}^{10} y_i \geq 9\}$, 則
   (a) 此檢定的顯著水平 (significance level) 爲 ___(1)___。
   (b) 此檢定在 $p = 0.8$ 時的型二錯誤 (type II error) 機率爲 ___(2)___。
   (c) 若得 $\sum_{i=1}^{10} Y_i$ 的觀測值爲 8, 試求此觀測值的 p-value= ___(3)___。

2. 考慮兩獨立樣本 $X_1, X_2, \cdots, X_m \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$。令 $\bar{X} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i$, $\bar{Y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $S_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$, $S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$, 則
   (a) $\dfrac{\bar{X} - \mu_x}{S_x/\sqrt{m}}$ 的分配爲 ___(4)___。　　(b) $\frac{S_x^2 \sigma_y^2}{S_y^2 \sigma_x^2}$ 的分配爲 ___(5)___。
   (c) μ_x 的95%信賴區間 ___(6)___。　　(d) σ_x^2 的95%信賴區間 ___(7)___。

3. 若 $X_1, X_2, \ldots, X_{16} \overset{iid}{\sim} \mathrm{U}(0,\theta)$, 令 $\widehat{\theta} = \max\{X_i\}_{i=1}^{16}$。
   (a) 若 $(k \cdot \widehat{\theta})$ 爲 θ 的不偏 (unbiased) 估計量, 則 $k =$ ___(8)___。
   (b) 估計量 $\widehat{\theta}$ 的均方誤函數 (mean squared error) 爲 ___(9)___。

4. 考慮迴歸模型 $y_i = \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, 30$, 其中 x_i 爲自變數 (觀測值), ϵ_i 爲誤差, 且 $\epsilon_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, 則以最小平方法 (method of least square) 所求得 β 的估計量爲 ___(10)___。

二、計算與證明:(每小題10分)

設 $X_1, X_2, \cdots, X_{10} \overset{iid}{\sim}$ Poisson(λ) 分配; 即 X_i 的 pdf 爲 $f(x;\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$。

(a) 證明 $\sum_{i=1}^{10} X_i$ 爲 Poisson(λ) 的充份完備統計量 (sufficient & complete statistics)。

(b) 推導 λ 的最大概似估計量 (MLE)。

(c) 證明當 $\mathrm{H}_0 : \lambda = 0.3$ 對 $\mathrm{H}_1 : \lambda = 0.7$ 的棄卻域爲 $\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 3$ 時, 此檢定 (test) 爲一個最強力檢定 (a most powerful test)。