

國立臺灣海洋大學 106學年度研究所碩士班招生考試試題

考試科目：工程數學(以線性代數、微分方程為主)

系所名稱：光電科學研究所碩士班不分組

1. 答案以橫式由左至右書寫。2. 請依題號順序作答。

1. 一階微分方程式 (35%)

請計算以下微分方程式：

(a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 10x$, for a given $y(0) = 2$

(b) $\frac{dy}{dx} = \sin 5x + \cos 2x$, $y(0) = 0$

(c) $\frac{dy}{dx} = (1+x)^2$, $y(0) = 1$

(d) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(0) = 1$

(e) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$, $y(0) = -1$

(f) $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$, $y(0) = 0$

(g) $\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7$, $y(0) = 0$

2. 二階與三階微分方程式 (25%)

請計算以下微分方程式：

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$

(b) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$

(c) $\frac{d^3y}{dx^3} + 12\frac{d^2y}{dx^2} + 36\frac{dy}{dx} = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -7$

(d) $2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = 14x^2 - 4x - 11$, solve by undetermined coefficients.

(e) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 15\sin 3x$, solve by undetermined coefficients.

3. 請找出向量 u 投影至 v 的大小與 v 向量投影至 u 的大小(10%)

(a) $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ and $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ and $v = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. 請找出下列矩陣的反矩陣 (10%)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. 請找出下列矩陣的所有本徵值和相對應的本徵向量 (10%)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

6. 假設矩陣 A 可以對角化，請找出用來對角化矩陣 P 與對角化後矩陣 D ，其滿足 $P^{-1}AP = D$. (10%)

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$