

國立臺灣師範大學 106 學年度碩士班招生考試試題

科目：基礎數學

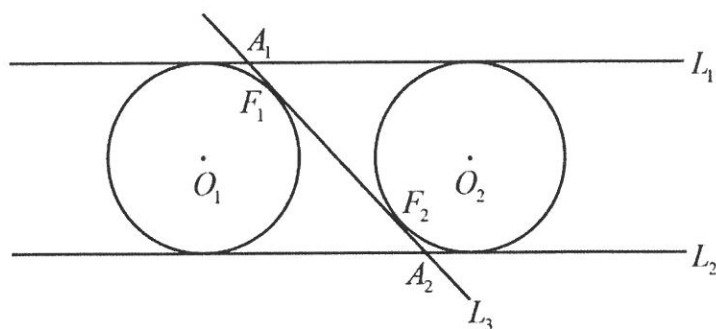
適用系所：科學教育研究所

注意：1.本試題共 1 頁，請依序在答案卷上作答，並標明題號，不必抄題。2.答案必須寫在指定作答區內，否則依規定扣分。

一、(20 分) 現有兩半徑為 r 的圓 O_1 與 O_2 ，圓心距離為 $2R$ ，其中 $R > r$ 。假設有三直線 L_1 、 L_2 及 L_3

均相切圓 O_1 與 O_2 ，如下圖所示，其中 L_3 與圓 O_1 與 O_2 相切於點 F_1 與 F_2 ，與直線 L_1 、 L_2 相交於

點 A_1 、 A_2 。現有一橢圓，其長軸為 $\overline{A_1A_2}$ ，兩焦點分別為 F_1 與 F_2 ，求該橢圓之短軸長度。



二、(15 分) 求 a 與 b 的值使得直線 $2x + y = b$ 與 $y = ax^2$ 相切於 $x = 2$ 。

三、(15 分) 求微分 $\frac{d^{99}}{dx^{99}} \sin 2x$ 。

四、(15 分) 求積分 $\int \frac{1}{(1+x)(2-x)} dx$ 。

五、(15 分) 現有一極座標曲線 $\Gamma: r = 2\cos\theta, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ，求 Γ 之長度以及 Γ 所圍住之區域的面積。

六、(20 分) 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 \end{bmatrix}$ ，求 A 的秩(rank)、所有的特徵值及其對

應的特徵向量。