

國立交通大學 100 學年度碩士班考試入學試題

科目：統計學(4083)

考試日期：100年2月18日 第3節

系所班別：統計學研究所 組別：統計所

第 | 頁, 共 | 頁

【不可使用計算機】*作答前請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證之所組別與考科是否相符!!

1. 20% 假設 $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ 為一組獨立之隨機樣本具有如下之密度函數(pdf)

$$f(y) = \begin{cases} \theta y^{-2}, & \text{當 } \theta \leq y \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

- (a) 10% 找出一個 θ 之充分統計量 (sufficient statistic)。
 (b) 10% 找出 θ 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。

2. 20% 若 X 與 Y 為獨立隨機變數，其分配分別為 $N(\mu, 1)$ 與 $N(\mu, 4)$ 。請求出 μ 之最小均方差不偏估計量 (UMVUE)。

3. 25% 超幾何分布：假設籃子中有 r 個紅球， s 個黑球。由此籃子中隨機選出 n 個球(取後不放回)，令 X 表示其中紅球的個數，則我們稱隨機變數 X 具有超幾何分布。(hypergeometric probability distribution)

在軟體 R 中有一個關於超幾何分布的分配函數的指令為 `phyper`。其定義為：
 $\text{phyper}(x, r, s, n) = P(X \leq x | r, s, n)$ 。

假設在籃子中有若干個球，其中有100個為紅球，其餘為黑球。我們從中取出50顆球，發現有13顆為紅球。我們所關心的參數為籃子中所有球的數目， θ 。請由以下 R 的結果給出一個 θ 的 90% 信賴區間 (confidence interval)。

$$\text{phyper}(12, 100, 187, 50) = 0.0516281, \quad \text{phyper}(12, 100, 186, 50) = 0.0495592$$

$$\text{phyper}(12, 100, 507, 50) = 0.9497874, \quad \text{phyper}(12, 100, 508, 50) = 0.9503746$$

$$\text{phyper}(13, 100, 450, 50) = 0.9502067, \quad \text{phyper}(13, 100, 449, 50) = 0.949516$$

$$\text{phyper}(13, 100, 170, 50) = 0.0497668, \quad \text{phyper}(13, 100, 171, 50) = 0.052096$$

$$\text{phyper}(14, 100, 156, 50) = 0.0503549, \quad \text{phyper}(14, 100, 155, 50) = 0.0478173$$

$$\text{phyper}(14, 100, 402, 50) = 0.9505335, \quad \text{phyper}(14, 100, 401, 50) = 0.9497372$$

4. 35% 若 X 為一個非負整數的隨機變數 (non-negative integer valued random variable)。假設 X 只有單一觀察值，
 (a) 15% 對於以下的假設檢定題目，在型一誤差(type I error)的容許值為 0.125 之情形下，請導出最有力檢定(most powerful test)，並求其檢定力 (power)。

$$H_0: f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad H_1: f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- (b) 20% 請將(a)中的 H_0 更改為包含一維參數的檢定題目(即 $H_0: \theta = \theta_0$)，且更動 H_1 為複合假設(composite alternatives)。請問怎樣的 H_1 ，一致最有力檢定 (UMP)會存在？(須解釋原因)