國立臺北科技大學105學年度碩士班招生考試

系所組別：2401、2402、2403光電工程系碩士班

第二節　工程數學　試題

注意事項：

1. 本試題共6題，每題10~20分，共100分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

1.(20%)

向量 $\vec{A}= xz^3\hat{\imath} - 2x^2yz\hat{\jmath} + 2yz^4\hat{k}$, 式中 $\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$ 代表直角坐標系的單位向量, 試求:

(a) 向量A在(1, −1, 1) 坐標點的散度(Divergence) $\nabla\cdot\vec{A}$ (10%)

(b) 向量A在(1, −1, 1) 坐標點的旋度(Curl) $\nabla\times\vec{A}$ (10%)

2.(10%)

(a) 矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, 試計算 A^4 (4%), 並解釋其幾何意義(2%)

(b) 矩陣 $B=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}$, 試解釋其幾何意義(4%)

[提示: 在XY坐標系標出 $y = x\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)$, 再以坐標轉換討論之]

3.(10%)

請計算下列積分

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+4}$$

C代表 $|z-2i|=1$ 的圓

4.(20%)

吾人可藉由觀察法得知多項式或指數函數是微分方程式 $(1-x)y''+xy'-y=0$ 的解, 已知 $y_1=x$ 是此微分方程式的解, 請用觀察法找出此微分方程式的另解 y_2 (5%),

並利用 y_1 和 y_2 求解微分方程式 $(1-x)y''+xy'-y=(1-x)^2$ (15%)

5.(20%)

(a) 若

$$F(s)=\frac{s+1}{s(s^2+1)}$$

是 f(t) 函數的拉普拉斯轉換 (Laplace transform), 試求出 f(t) 函數 (10%)

(b) 請應用拉普拉斯轉換法求解下列微分方程式 (10%)

$y'+y=e^{2t}$, 其初始條件 $y(0)=0$

6.(20%)

一微分方程式如下:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{E}q(x)$$

式中 E 為常數, 其邊界條件(Boundary Condition)為 $y(0)=y(L)=0$

令 $q(x)=q$, q 為常數, 請應用傅利葉級數(Fourier series)法求解此微分方程式