

東海大學 104 學年度碩士班招生考試試題

考試科目：微積分 A

應考系組：應數系

科目代碼：24011

考試日期：104 年 03 月 08 日 第 1 節 使用計算機：不可

共 2 頁，第 1 頁

以下各題請詳列計算過程，否則不計分。

1. (4×5%) 求下列各小題的極限值，若不存在請說明原因。

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2-h)}{h}$ ，其中 $f(2) = 3$ 且 $f'(2) = 5$ 。

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$ 。

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_{x^2}^4 \sqrt{t^3 + 2t + 9} dt}{x - 2}$ (提示：利用微積分基本定理)。

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ 。

2. (2×8%) 令 $f(x) = xe^{-x^2}$ 。

(a) 求 $f(x)$ 的局部極大、極小值(local maximum and minimum values)。

(b) 求 $f(x)$ 的上凹或下凹區間(intervals of concave upward or downward)。

3. (5×4%) 計算下列積分

(a) $\int_0^3 xf(x^2) dx$ ，其中 f 為連續函數且 $\int_0^9 f(x) dx = 10$ 。

(b) $\int x \ln x dx$ 。

(c) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^4} dx$ 。

(d) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy dx$ 。

(e) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$ 。

東海大學 104 學年度碩士班招生考試試題

考試科目：微積分 A

應考系組：應數系

科目代碼：24011

考試日期：104 年 03 月 08 日 第 1 節

使用計算機：不可

共 2 頁，第 2 頁

4. (12%) 將 $\frac{1 - \cos x^2}{x^3}$ 表示成冪級數 (power series)，並以此求 $\int_0^1 \frac{1 - \cos x^2}{x^3} dx$ 的近似值精確至小數點後第三位。

5. (2×8%) 令 $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3 + 1$ 。

(a) 求 $f(x, y)$ 在點 $(1, 1)$ 沿著向量 $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ 的方向導數 (directional derivative)

$$D_{\vec{v}} f(1, 1)。$$

(b) 求單位向量 \vec{u} 使得 $f(x, y)$ 在點 $(1, 1)$ 沿著向量 \vec{u} 的方向導數為最大。

6. (2×8%) 令 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ 。

(a) 求 $f(x, y)$ 的局部極大值、局部極小值，以及 $z = f(x, y)$ 圖形的鞍點 (saddle points)。

(b) 求 $f(x, y)$ 限制在區域 $D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0$ 的絕對極大、極小值 (absolute maxima and minima)。