1. 以 Gauss-Jordan 消去法 求算 x_1, x_2, x_3 之值【計分：15 分】

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2. 請計算 f 函數在 P 點位置，於 $\vec{a}$ 方向之方向導數（Directional Derivative）

$$f(x,y,z)=2xz+e^y z^2,\quad \vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k},\quad P(2,1,1)$$ 【計分：15 分】

3. 解下列方程式組：【計分：20 分】

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = \dfrac{1}{2}y_1 + y_2 \end{cases},\ y_1(0)=16,\ y_2(0)=-2$$

4. 假設 M_2 為實數域 R 上所有二階方陣所形成的向量空間(vector space)，且已知 $\mathbf{E}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\mathbf{E}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\mathbf{E}_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\mathbf{E}_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。另外，假設 P_2 為次數小於或等於 2 之實係數多項式所形成的向量空間，並定義某種轉換 T 為

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d)+(2a+b)x+(b-c)x^2,\quad a, b, c, d\in R$$

(1) 試證：$\beta_1=\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ 為 M_2 的一組基底。【計分：4 分】
(2) 試證：$\beta_2=\{1, x, x^2\}$ 為 P_2 的一組基底。【計分：4 分】
(3) 試證：T 為一個線性變換(linear transformation)。【計分：8 分】
(4) 試求 T 對應於基底 β_1 至基底 β_2 的矩陣表示(matrix representation)。【計分：4 分】

5. 已知線性動態系統為

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\equiv \mathbf{A}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求解此線性動態系統的通解並判別是否具有週期性解(periodic solutions)? 【計分：10 分】
(2) 求解此線性動態系統滿足所示初始條件的解。【計分：5 分】
(3) 在相平面(Phase-plane)上，繪製此系統的解答軌跡(Trajectory)並指示其指向。【計分：5 分】

6. 已知矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，試求出 $\mathbf{A}$ 之奇異值分解(Singular value decomposition, SVD)型式。【計分：10 分】

試題隨卷繳回