

國立臺灣師範大學 104 學年度碩士班招生考試試題

科目：基礎數學

適用系所：科學教育研究所

注意：1.本試題共 1 頁，請依序在答案卷上作答，並標明題號，不必抄題。2.答案必須寫在指定作答區內，否則不予計分。

1. (10 分) 假設 $f(x) = e^x \cos x$ ，求極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ 。
2. (10 分) 求曲線 $x^3 + y^3 = 6xy$ 在點 $(3,3)$ 處的切線方程式。
3. (a) (10 分) 證明以下降階公式

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

其中 $n \geq 2$ 為一正整數。

- (b) (10 分) 用上述結論歸納以下結果：

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)}$$

4. 假設 $f(x) = xe^x$ 。
 - (a) (8 分) 求 $f(x)$ 之馬克勞林級數(Maclaurin series)。
 - (b) (7 分) 求 $f^{(2015)}(0)$ 。
5. (10 分) 假設平面上有一鏡面，其方程式為 $L: ax + by = c$ ，其中 $a \neq 0$ 。現有一光束從 $+\infty$ 處沿著 $y = d$ 射入該鏡面，求反射光束的直線方程式。
6. 考慮拋物線 $P: y^2 = 4px$ 其中 $p > 0$ 。
 - (a) (5 分) P 之焦點與準線分別為何？
 - (b) (10 分) 假設 P 為一鏡面，現有一光束從 $+\infty$ 處沿著 $y = d$ 射入該鏡面，證明其反射光束通過焦點。
7. 假設線性映射 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定義為： $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2)$ 。
 - (a) (5 分) 問 T 之零空間(null space)為何？
 - (b) (5 分) 問 T 之值域(range)為何？
 - (c) (5 分) T 是否為一對一(one-to-one)? 陳述你的理由。
 - (d) (5 分) T 是否為映成(onto)? 陳述你的理由。