大同大學 104 學年度研究所碩士班入學考試試題

考試科目:工程數學　　　　所別:機械工程研究所　　　　第 全 頁

註:本次考試 不可以參考自己的書籍及筆記； 不可以使用字典； 不可以使用計算器。

Part A

1. (10%) 求 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$的傅利葉級數 (Fourier series)

2. (15%) 求解一維熱傳方程式的初始邊界問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1\ \ t>0$$

邊界條件: $u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ \ t>0$

初始條件 $u(x,0)=\sin \pi x \quad 0\le x\le 1$

3. (20%) 如果 $f(-x)=f(x)$ 則 $f(x)$ 稱為偶函數(even function)例如 $\cos x$，如果 $f(-x)=-f(x)$ 則 $f(x)$ 稱為奇函數(odd function) 例如 $\sin x$，今有 $f_n(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$， $f_o(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，請證明下列性質

   (a) 證明 $f_n(x)$ 為偶函數， $f_o(x)$ 為奇函數 (提示: 證明 $f_n(-x)=f_n(x)$ ， $f_o(-x)=-f_o(x)$)

   (b) 證明任一函數可以寫成偶函數+奇函數之和，i.e. $f(x)=f_n(x)+f_o(x)$

   (c) 假設 $f(x)$ 為周期 $2L$ 的周期函數，則證明 $f_n(x)$ 跟 $f_o(x)$ 皆為周期 $2L$ 的周期函數。(提示: $f(x)$ 為周期 $2L$ 的周期函數，則 $f(-x)$ 也是周期 $2L$ 的周期函數)

   (d) $f(x)$ 為周期 $2L$ 的周期函數 $(-L<x<L)$ ，其傅利葉級數為 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$ ，請證明 $f_n(x)$ 跟 $f_o(x)$ 傅利葉級數分別為 $f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$　$f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ (提示: $\frac{a_0}{2}$ 為偶函數)

Part B

4. (10%) 請求解 $x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$

5. (10%) 請求解 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=e^x$

6. (10%)請證明 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$

7. (15%) 若 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&2&-1\\5&7&-4\end{pmatrix}$， $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$， $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}7\\-1\\9\end{pmatrix}$.

   (a) 矩陣 **A** 是否為非奇異 (nonsingular)? 請說明之。

   (b) 若矩陣 **A** 為非奇異的，求其反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 。

   (c)求解 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 。

8. (10%) 如果 $\det\mathbf{A}=0$ 則**A**為奇異矩陣(singular matrix)，請證明**A** 跟 **B** 為 $n\times n$ 矩陣，若**A**或**B**為奇異矩陣，則**AB**為奇異矩陣, if $\det\mathbf{A}=0$ or $\det\mathbf{B}=0\Rightarrow\det(\mathbf{AB})=0$ 。(提示: $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$)。