中原大學104學年度碩士班考試入學

104/3/4　10:10 AM~11:40 AM　　　　誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

應用數學系數學組；應用數學系數學組在職生(在職)

科目：線性代數　　　　　　　　　（共1頁，第1頁）

□可使用計算機(僅限於四則運算、三角函數及對數等基本功能，可程式之功能不可使用)
■不可使用計算機

---

1. (1) 已知 R^3 中有5個點 $O(0, 0, 0), A(1, 0, 1), B(0, 1, 1), C(2, 1, 0), D(-1, 1, 2)$，若平面 E_1 通過 O, A, B 三點，平面 E_2 通過 O, C, D 三點，求 E_1 及 E_2 的方程式。(5%)
   (2) 若 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 生成子空間 E_1, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ 生成子空間 E_2，求 $E_1 \cap E_2$ 的一組基底。(5%)
2. 求一個實係數4次多項式 $f(x)$ 使得 $f(-2)=1, f(-1)=2, f(0)=3, f(1)=4, f(2)=5$。(10%)
3. 設 T 是一個從 R^2 映至 R^3 的線性映射且 $T((3, 2))=(1, 7, 7)$, $T((2, 1))=(8, -5, 3)$，求 $T((x, y))$。(10%)
4. 設 A, B 為3階實方陣，

   (1) 若 $\det A=3$ 且 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\det(AB)$。(5%)

   (2) 試證 AB 可逆的充要條件為 BA 可逆。(5%)
5. 設 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，
   (1) 求 A 的特徵多項式及 A 的固有值。(5%)
   (2) 求一個矩陣 P 使得 $P^{-1}AP$ 為一對角矩陣。(5%)
6. 設 $v_1=(0, 1, 0)$, $v_2=(3, 1, 4)$, $v_3=(0, 2, 5)$ 為 R^3 中3個向量，
   (1) 求 v_2 在 v_1 的正射影。(5%)
   (2) 求 v_3 在 v_1 與 v_2 所生成子空間上的正射影。(5%)
7. 設 A 為一3階實方陣且 $A^2=O$，試證 $(I_3-A)^{-1}=I_3+A$。(10%)
8. 設 $T: R^3 \to R^3$ 為一線性映射且 $T(v_1), T(v_2)$ 為線性獨立，試證 v_1, v_2 為線性獨立。(10%)
9. 設 $T: R^3 \to R^3$ 為一線性映射且 λ_1, λ_2 為 T 的固有值，若 v_1, v_2 分別是 T 對應於 λ_1, λ_2 的固有向量且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，試證 v_1, v_2 為線性獨立。(10%)
10. 設 $\lambda \in R$ 為 n 階實方陣 A 的一個固有值，且 V 是一個具有 n 個分量的行向量，試證 V 是 A 對應於 λ 的一個固有向量的充要條件為 V 不為零向量且 $V \in N(A-\lambda I_n)$。(其中 $N(A-\lambda I_n)=\{V \in R^{n\times 1} \mid (A-\lambda I_n)V=0\}$ 為 $A-\lambda I_n$ 的零核空間。)(10%)