

開南大學 101 學年度碩士班招生考試試題卷

科目：微積分(碩士班)

用紙第 1 頁共 2 頁

請將正確答案填寫於答案卷中

1. 令集合 A 為 $\left\{\pm\frac{1}{n}:n\in N\right\}$ 。定義函數 $f(x):[-1, 1]\rightarrow R$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in A \\ 2^{-100}, & x\in[-1,1]-A \end{cases}$$

試對任意的 $x_0\in(-1, 1)$ ，求極限值 $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)$ 。若其值不存在，請說明原因。(10%)

註： N 、 R 分別為自然數、實數所成的集合； $n\in N$ 表示 n 為 N 集合中的元素。

2. 設 $f(x)=\begin{cases} 4x+14, & x<4 \\ 16\sqrt{x}-2, & x\geq 4 \end{cases}$ ，試以導數之定義驗證 $f(x)$ 在 $x=4$ 是否可微分。(10%)

3. 求瑕積分 $\int_0^{\infty} (2x-1)^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ 。(10%)

4. 若把相同金額同時分別存入兩家銀行，其中甲銀行以 6% 的年利率每半年複利一次，乙銀行以 $\ln 1.03$ 的年利率連續複利(即每一瞬間皆在複利)，試求當甲銀行達到本利和為原來金額的兩倍時，乙銀行的本利和為原來金額的幾倍？(10%)

註： $\ln 1.03 \approx 2.95588\%$

5. 若把 $\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{2}{n}$ 視為某函數 $f(x)$ 在某個閉區間 $[a, b]$ 中的一個黎曼和，試求：

(1) 函數 $f(x)$ 及閉區間 $[a, b]$ ，(2) $\lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{2}{n}$ 。(10%)

6. 考慮下列幾何無窮級數，判定其是否收斂。若收斂，其總和結果為何？

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} 6(0.9)^n$ (4%)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{8^n}$ (4%)

請翻背面繼續作答

開南大學 101 學年度碩士班招生考試試題卷

科目：微積分(碩士班)

用紙第 2 頁共 2 頁

請將正確答案填寫於答案卷中

7. 考慮下列無窮冪次級數，決定其收斂半徑及區間？

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n \quad (7\%)$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n \quad (7\%)$$

8. 考慮下列函數，找出其在指定 x 的值之泰勒二次展開式。

$$(1) f(x) = \frac{7}{x+7}; x=6 \quad (7\%)$$

$$(2) f(x) = e^{12x}; x=0 \quad (7\%)$$

9. 考慮下列函數，找出其在指定的區間之最大值

$$(1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} \quad \text{on } [-8, 8] \quad (7\%)$$

$$(2) g(x) = \frac{1}{x+8} \quad \text{on } [0, \infty] \quad (7\%)$$