國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試試題卷

所別：電機工程系　　　　　　　　　　組別：

科目：工程數學

准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項：
一、考試時間100分鐘。
二、請將各題解答書寫至答案卷中。

試題一：〈20分〉

Solve the differential equation.

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

試題二：〈20分〉

Find the Laplace transform solution of the following system.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

試題三：〈20分〉

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{compute } A^{-1}.$$

試題四：〈20分〉

Differential equation $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$, find

(a) integrating factor　(b) general solution.

試題五：〈20分〉

Find the directional derivative of $f(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$ at (1, -2, -1) in the direction 2*i*-*j*-2*k*.

國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試試題卷
所別：電機工程系
科目：工程數學

<解　答>

1.

此爲 $n=3$ 的柏努利方程式，將原式等號兩邊除以 y^3，得

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+y^{-2}=x$$

令 $y^{-2}=v$，則 $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$，代入上式得

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+v=x \text{ 或 } \frac{dv}{dx}-2v=-2x$$

此爲 v 的一階線性微分方程式，其通解爲

$$v=e^{\int 2\,dx}\left[\int e^{-\int 2\,dx}\cdot(-2x)\,dx+c\right]=e^{2x}\left[-2\int e^{-2x}\cdot x\,dx+c\right]$$

$$=e^{2x}\left[xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+c\right]=x+\frac{1}{2}+ce^{2x}$$

故原微分方程式之通解爲 $\dfrac{1}{y^2}=x+\dfrac{1}{2}+ce^{2x}$，其中 c 爲常數.

2.

解：$\begin{cases} sX(s)-1=-X(s)+Y(s) \\ sY(s)=-2X(s)-4Y(s) \end{cases}$

解得 $$X(s)=\frac{s+4}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$Y(s)=\frac{-2}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+3}-\frac{2}{s+2}$$

故 $$x=2e^{-2t}-e^{-3t}，\ y=2(e^{-3t}-e^{-2t})$$

3.

$\left\langle \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ 　　 且 $\left\langle \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix} \right\rangle = 1$

$\left\langle \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ 　　 $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1$

$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ 　　 $\left\langle \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\rangle = 1$

∴ A 是正交矩陣

則 $A^{-1}=A^T$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

4.

(a) 令 $M(x,y)=x^2+y^2+x$

$N(x,y)=xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+x)=2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xy)=y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\text{ (非正合)}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{x}=f(x)$$

積分因子 $I(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=x$

(b) $\xrightarrow{\times I(x)}(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2y\,dy=0$ …正合

$$\begin{cases}\Phi(x,y)=\int(x^3+xy^2+x^2)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}+f(y)\\ \Phi(x,y)=\int x^2y\,dy=\frac{x^2y^2}{2}+f(x)\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{比較}}\Phi(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}=C$

5.

解：$\nabla f(x, y, z)=(2xyz+4z^2)\mathbf{i}+x^2z\mathbf{j}+(x^2y+8xz)\mathbf{k}$

$\nabla f(1, -2, -1)=8\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k}$

沿著 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 方向的單位向量為

$$\mathbf{u}=\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$$

故方向導數為

$$\frac{df}{ds}=(8\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)=\frac{37}{3}$$