國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試**試題卷**

所別：研發科技與資訊管理研究所　　組別：研發科技組

科目：工程數學(常微分方程式、矩陣)

准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項： 一、考試時間100分鐘。 二、請將答案書寫於答案卷上。 三、本試卷計四題試題，共1頁。

試題一：〈 25分〉

求方程式 $x\ln x dy - y dx = 0$ 之通解。

試題二：〈 25分〉

求解 $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 2y = 170\cos(3x)$

試題三：〈 25分〉

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，求A之特徵值(Eigen value)及特徵向量(Eigen vector)。

試題四：〈 25分〉

求聯立方程式之解。

$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$

$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$

$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$

國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試<u>解答</u>
所別：研發科技與資訊管理研究所　　組別：A（研發科技組）
科目：工程數學
准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項： 一、考試時間100分鐘。 二、請將答案書寫於答案卷上。 三、本試卷計四題試題。

試題一：〈25分〉

求方程式 $x\ln x dy - y dx = 0$ 之通解。

解答：

$$x\ln x dy = y dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x} = \frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

所以 $\ln y = \ln(\ln x) + c_1$

$$y = c\ln x$$

試題二：〈25分〉

求解 $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 2y = 170\cos(3x)$

［解］:**特徵方程式:** $r^3 + 3r^2 + 4r + 2 = 0$

解得: $r = -1, -1+i, -1-i$

得齊次解為: $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\sin x$

令特解 ： $y_p = Ae^{i3x}, y_p' = 3Aie^{i3x}, y_p'' = -9Aie^{i3x}, y_p''' = -27Aie^{i3x}$

帶入 $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 2y = 170e^{i3x}$

得:

$$(-25-15i)Ae^{i3x} = 170e^{i3x}$$

$$A = -\frac{170}{25+15i} = -5+3i$$

取 $y_p = \mathrm{Re}(Ae^{i3x}) = \mathrm{Re}\{(-5+3i)[\cos(3x) + i\sin(3x)]\}$

$$= -5\cos(3x) - 3\sin(3x)$$

所以: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x - 5\cos(3x) - 3\sin(3x)$

試題三：〈25 分〉

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，求 A 之特徵值(Eigen value)及特徵向量(Eigen vector)。

[解]:

求 A 之特徵值:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

<u>得特徵值</u>: $\lambda = 1, \quad 6$

(1) $\lambda = 1$ 時 $\begin{bmatrix} 5-1 & 4 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

解得: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 為 $\underline{\lambda = 1}$ **<u>的特徵向量</u>**

(2) $\lambda = 6$ 時 $\begin{bmatrix} 5-6 & 4 \\ 1 & 2-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

解得: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 為 $\underline{\lambda = 6}$ **<u>的特徵向量</u>**

試題四：〈25 分〉

求聯立方程式之解。

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$$

解答：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{46} \times 92 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{46} \times 0 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{46} \times (-46) = -1$$