國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試試題卷

所別：工業工程與管理系　　　　　　組別：品管統計組

科目：統計學

准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項：
一、考試時間100分鐘。
三、可使用電子計算機

試題一：〈四十分〉

欲比較不同的燈泡品牌及不同的燈泡型式，對燈泡壽命是否造成影響，今選取四種品牌、三種型式燈泡進行實驗，看其壽命長短有無差異。茲將資料整理如下表(單位：小時)：

型式\品牌	甲	乙	丙	丁	平均
圓形	69	75	70	66	70
長形	72	74	78	68	73
螺旋形	60	74	65	55	63.5
平均	67	74.33	71	63	

(a).以上數據欲進行二因子變異數分析，請問假設條件為何？（10%）

(b).請建立變異數分析表（假設品牌與型式無交互作用存在）。（10%）

(c).在顯著水準 α=0.05 下，請檢定燈泡型式是否對壽命造成影響？（10%）

(d).在顯著水準 α=0.05 下，請檢定燈泡品牌是否對壽命造成影響？（10%）

$F_{0.05}$ 分配值				
df_2 \ df_1	2	3	5	6
2	19.000	19.164	19.296	19.330
3	9.5521	9.2766	9.0135	8.9406
5	5.7861	5.4095	5.0503	4.9503
6	5.1433	4.7571	4.3874	4.2839

試題二：〈二十分〉

Given expected value E(X+8) = 20 and $E[(X+5)^2] = 325$,

(a). Find the variance Var(3X+8). (10%)

(b). Find the expected value $E[(X-5)^2]$. (10%)

試題三：〈二十分〉

The probability density function of the random variance X is given by

$$f(x)=\begin{cases}(a+bx+x^2) & for\ 0\le x\le 1\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

Given expected value $E(X)=\frac{1}{2}$, please find the value a and b. (20%)

試題四：〈二十分〉

比較 A、B 兩生產線的品質差異，檢查 A 所生產的 300 個產品中有 60 個不良品，樣本不良率為 $\hat{p}_1=0.2$；而 B 所生產的 200 個產品中有 20 個不良品，樣本不良率為 $\hat{p}_2=0.1$。

(a).請求 P_1-P_2 之 95%信賴區間? (10%)

(b).在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請檢定 A、B 生產線之不良率是否相同？(10%)

試題五：〈二十分〉

某鎮今年共有 50 位役男抽籤決定軍種，其中有兩支陸戰隊籤，某同學修過統計學，請問

(a). 他要如何抽籤才能使抽中陸戰隊的機率最低？(10%)

(b). 其機率應為多少？(10%)

試題六：〈三十分〉

某公司有 ABC 三台設備生產相同產品，其產能分別佔整體的 20%，30%，50%，不良率各為 3%，3%，2%，某日總生產量 1000 件，請問

(a). 整體良率為多少？(10%)

(b). 已知抽出一個產品為良品，請問來自 A 設備的機率為多少？(10%)

(c). 若抽驗一個產品發現為不良品，來自設備 B 的機率多少？ (10%)

試題七：〈二十分〉

校園中有 3 隻黑狗、3 隻花狗、3 隻白狗與 3 隻黃狗。隨機抽取 4 隻，令 X 表示黑狗數，Y 表示白狗數。求：

(a). X 與 Y 的聯合機率分配 (10%)

(b). 計算 P(X+Y>=2) (10%)

試題八：〈三十分〉

某電子產品的壽命服從指數分配，其平均壽命為 5 年，保固期定為 1 年，保固內故障可退貨還錢，請問

(a). 可能會有多少退貨比例？(10%)

(b). 使用超過 3 年不壞的機率為何？(10%)

(c). 若希望在保固期內被退貨的機率在 5%以內，則保固期應訂為多久？(10%)

國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試試題卷

所別：工業工程與管理系　　　　　　　　組別：

科目：統計學

准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項：
一、考試時間100分鐘。
三、可使用電子計算機

試題一：〈四十分〉

欲比較不同的燈泡品牌及不同的燈泡型式，對燈泡壽命是否造成影響，今選取四種品牌、三種型式燈泡進行實驗，看其壽命長短有無差異。茲將資料整理如下表(單位：小時)：

型式\品牌	甲	乙	丙	丁	平均
圓形	69	75	70	66	70
長形	72	74	78	68	73
螺旋形	60	74	65	55	63.5
平均	67	74.33	71	63	

(a).以上數據欲進行二因子變異數分析，請問假設條件為何？（10%）

(b).請建立變異數分析表（假設品牌與型式無交互作用存在）。（10%）

(c).在顯著水準 α=0.05 下，請檢定燈泡型式是否對壽命造成影響？（10%）

(d).在顯著水準 α=0.05 下，請檢定燈泡品牌是否對壽命造成影響？（10%）

$F_{0.05}$ 分配值				
df_2 \ df_1	2	3	5	6
2	19.000	19.164	19.296	19.330
3	9.5521	9.2766	9.0135	8.9406
5	5.7861	5.4095	5.0503	4.9503
6	5.1433	4.7571	4.3874	4.2839

[解答]

(a) 假設條件：

1. 常態性假設：每個小母體均為常態分配。
2. 同質性假設：每個小母體分配的變異數相等。
3. 獨立性假設：每個隨機樣本互為獨立。

(b) 變異數分析表

變異來源	平方和（SS）	自由度	均方（MS）	F 值
A 因子（型式）	188.6667	2	MSA=94.3334	F_A=7.6373
B 因子（品牌）	216.89	3	MSB=72.2967	F_B=5.8532
誤差	74.11	6	MSE=12.3517	
合計	479.6667	11		

(c) $H_0: \mu_{圓} = \mu_{方} = \mu_{螺旋}$

$H_1: \mu_{圓}, \mu_{方}, \mu_{螺旋}$不全相等

檢定統計量 $F_A > F_{0.05,(2,6)} = 5.1433$，Reject 虛無假設，

表示燈泡型式對其壽命造成影響

(d) $H_0: \mu_{甲} = \mu_{乙} = \mu_{丙} = \mu_{丁}$

$H_1: \mu_{甲}, \mu_{乙}, \mu_{丙}, \mu_{丁}$不全相等

檢定統計量 $F_B > F_{0.05,(3,6)} = 4.7571$，Reject 虛無假設，

表示燈泡品牌對其壽命造成影響

試題二：〈二十分〉

Given expected value E(X+8) = 20 and $E[(X+5)^2] = 325$,

(a). Find the variance Var(3X+8). (10%)

(b). Find the expected value $E[(X-5)^2]$. (10%)

[解答]

$E(X+8) = E(X) + 8 = 20, \quad E(X) = 20 - 8 = 12$

$E[(X+5)^2] = E[X^2 + 10X + 25] = E(X^2) + 10E(X) + 25 = 325, \quad E(X^2) = 180$

(a) $Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 180 - 12^2 = 36$

$\underline{Var(3X+8) = 9 \times Var(X) = 9 \times 36 = 324}$

(b) $\underline{E[(X-5)^2] = E[X^2 - 10X + 25] = E(X^2) - 10 \times E(X) + 25 = 85}$

試題三：〈二十分〉

The probability density function of the random variance X is given by

$$f(x)=\begin{cases}(a+bx+x^2) & for\ 0\le x\le 1\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

Given expected value $E(X)=\frac{1}{2}$, please find the value a and b. (20%)

［解答］

$\int_0^1 (a+bx+x^2)dx=1$, $[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3]\Big|_0^1=1$，故 $a+\frac{1}{2}b=\frac{2}{3}\cdots$①

$E(X)=\int_0^1 x(a+bx+x^2)dx=[\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4]\Big|_0^1=\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b=\frac{1}{4}\cdots$②

①式與②式解連立方程式，可得 $\underline{a=\frac{7}{6},b=-1}$

試題四：〈二十分〉

比較 A、B 兩生產線的品質差異，檢查 A 所生產的 300 個產品中有 60 個不良品，樣本不良率為 $\hat{p}_1=0.2$；而 B 所生產的 200 個產品中有 20 個不良品，樣本不良率為 $\hat{p}_2=0.1$。

(a).請求 P_1-P_2 之 95%信賴區間？(10%)

(b).在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請檢定 A、B 生產線之不良率是否相同？(10%)

［解答］

(a) P_1-P_2 之 95%信賴區間：

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$(0.2-0.1)\pm 1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{300}+\frac{0.1(1-0.1)}{200}}$$

信賴區間：**<u>(0.038538033, 0.161461966)</u>**

(b)

$H_0: P_1=P_2$
$H_1: P_1\ne P_2$

混合估計量 $\hat{P}=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}=\frac{60+20}{300+200}=0.16$

檢定統計量

$$Z=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{0.2-0.1}{\sqrt{0.16\times(1-0.16)\times(\frac{1}{300}+\frac{1}{200})}}=2.988071523$$

檢定統計量 $Z > Z_{0.025}=1.96$，Reject H_0

在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，A、B 生產線不良率不相同

試題五：〈二十分〉

某鎮今年共有 50 位役男抽籤決定軍種，其中有兩支陸戰隊籤，某同學修過統計學，請問

(a). 他要如何抽籤才能使抽中陸戰隊的機率最低？(10%)

(b). 其機率應為多少？(10%)

[解答]

令 Y_i 表示第 i 個順序抽而抽中陸戰隊籤的事件，N_j 表示第 j 個順序抽而沒抽中陸戰隊籤的事件，

則 $P(1)=P(Y_1)=\frac{2}{50}$, $P(2)=P(Y_1Y_2)+P(N_1Y_2)=\frac{2}{50}\times\frac{1}{49}+\frac{48}{50}\times\frac{2}{49}=\frac{2\times(1+48)}{50\times 49}=\frac{2}{50}$,

$P(3)=P(Y_1N_2Y_3)+P(N_1Y_2Y_3)+P(N_1N_2Y_3)=\frac{2}{50}\times\frac{1}{49}+\frac{48}{50}\times\frac{2}{49}=\frac{2\times(1+48)}{50\times 49}=\frac{2}{50}$,

....

$$
\begin{aligned}
P(n) &= P(\text{前n-1次只抽中一次且第n次抽中}) + P(\text{前n-1次皆沒抽中且第n次抽中}) \\
&= \frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n+1)\times 2\times(n-1)}{50\times 49\times 48\times\ldots\ldots\times(50-n+2)}\times\frac{1}{50-n+1}+\frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n)\times 2}{50\times 49\times 48\times\ldots\times(50-n+1)} \\
&= \frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n+1)\times 2\times(n-1)+48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n)\times 2}{50\times 49\times 48\times\ldots\ldots\times(50-n+2)\times(50-n+1)} \\
&= \frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n+1)\times[2\times(n-1)+(50-n)\times 2]}{50\times 49\times 48\times\ldots\ldots\times(50-n+2)\times(50-n+1)} \\
&= \frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n+1)\times[2n-2+100-2n]}{50\times 49\times 48\times\ldots\ldots\times(50-n+2)\times(50-n+1)} \\
&= \frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n+1)\times[98]}{50\times 49\times 48\times\ldots\ldots\times(50-n+2)\times(50-n+1)} \\
&= \frac{48\times 47\times 46\times\ldots\times(50-n+1)\times[2\times 49]}{50\times 49\times 48\times\ldots\ldots\times(50-n+2)\times(50-n+1)} \\
&= \frac{2}{50}
\end{aligned}
$$

因此，任何順序抽籤抽中陸戰隊籤的機率皆相同，等於 $\frac{2}{50}$

試題六：〈三十分〉

某公司有 ABC 三台設備生產相同產品，其產能分別佔整體的 20%，30%，50%，不良率各為 3%，3%，2%，某日總生產量 1000 件，請問

(a). 整體良率為多少？(10%)

(b). 已知抽出一個產品為良品，請問來自 A 設備的機率為多少？(10%)

(c). 若抽驗一個產品發現為不良品，來自設備 B 的機率多少？ (10%)

[解答]

(a) 根據題意，令 G 為良品事件，D 為不良品事件，則
$$P(A)=0.2, P(D\mid A)=0.03; P(G\mid A)=0.97$$
$$P(B)=0.3, P(D\mid B)=0.03; P(G\mid B)=0.97$$
$$P(C)=0.5, P(D\mid C)=0.02; P(G\mid C)=0.98$$

$$P(G)=P(G\cap A)+P(G\cap B)+P(G\cap C)$$
$$=P(A)\times P(G\mid A)+P(B)\times P(G\mid B)+P(C)\times P(G\mid C)$$
$$=0.2\times 0.97+0.3\times 0.97+0.5\times 0.98=0.975$$

整體良率為 0.975

(b) $P(A\mid G)=\dfrac{P(A\cap G)}{P(G)}=\dfrac{P(A)\times P(G\mid A)}{P(G)}=\dfrac{0.2\times 0.97}{0.975}=0.19897436$

(c) $P(B\mid D)=\dfrac{P(B\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(B)\times P(D\mid B)}{1-P(G)}=\dfrac{0.3\times 0.03}{1-0.975}=0.36$

試題七：〈二十分〉

校園中有 3 隻黑狗、3 隻花狗、3 隻白狗與 3 隻黃狗。隨機抽取 4 隻，令 X 表示黑狗數，Y 表示白狗數。求：

(a). X 與 Y 的聯合機率分配 (10%)

(b). 計算 P(X+Y>=2) (10%)

[解答]

(a) 總共有 12 隻狗，共抽出 4 隻，其中有 X 隻黑狗，Y 隻白狗，其餘 4-X-Y 為其他花色的狗，可寫出 X 與 Y 的聯合機率分配為：$P(X,Y)=\dfrac{C_X^3C_Y^3C_{4-X-Y}^6}{C_4^{12}}, X+Y\le 4, 0\le X\le 3, 0\le Y\le 3$

(b)

X,Y	0	1	2	3
0	$\frac{C_0^3C_0^3C_4^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_0^3C_1^3C_3^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_0^3C_2^3C_2^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_0^3C_3^3C_1^6}{C_4^{12}}$
1	$\frac{C_1^3C_0^3C_3^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_1^3C_1^3C_2^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_1^3C_2^3C_1^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_1^3C_3^3C_0^6}{C_4^{12}}$
2	$\frac{C_2^3C_0^3C_2^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_2^3C_1^3C_1^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_2^3C_2^3C_0^6}{C_4^{12}}$	0
3	$\frac{C_3^3C_0^3C_1^6}{C_4^{12}}$	$\frac{C_3^3C_1^3C_0^6}{C_4^{12}}$	0	0

=

X,Y	0	1	2	3
0	$\frac{15}{495}$	$\frac{60}{495}$	$\frac{45}{495}$	$\frac{6}{495}$
1	$\frac{60}{495}$	$\frac{135}{495}$	$\frac{54}{495}$	$\frac{3}{495}$
2	$\frac{45}{495}$	$\frac{54}{495}$	$\frac{9}{495}$	0
3	$\frac{6}{495}$	$\frac{3}{495}$	0	0

$$P(X+Y\ge 2)=1-P(X+Y<2)=1-P(X+Y\le 1)=1-\frac{15}{495}-\frac{60}{495}-\frac{60}{495}=\frac{360}{495}=\frac{72}{99}=0.72$$

試題八：〈三十分〉

某電子產品的壽命服從指數分配，其平均壽命為 5 年，保固期定為 1 年，保固內故障可退貨還錢，請問

(a). 可能會有多少退貨比例？(10%)

(b). 使用超過 3 年不壞的機率為何？(10%)

(c). 若希望在保固期內被退貨的機率在 5%以內，則保固期應訂為多久？(10%)

［解答］(a).

假設此電子產品壽命爲Y，平均壽命爲$5=\frac{1}{\lambda}$, $\lambda=\frac{1}{5}$, Y服從指數分配，則其機率密度函數爲

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}y}, & y\geq 0\\ 0, & \text{其他範圍}\end{cases}$$

保固期內故障機率等於$P(Y\leq 1)=\int_0^1\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}y}dy=-e^{-\frac{1}{5}y}\Big|_0^1=-(e^{-\frac{1}{5}}-e^0)=1-e^{-\frac{1}{5}}=0.1812692469$

(b).

使用超過三年的機率等於$P(Y>3)=\int_3^\infty\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}y}dy=-e^{-\frac{1}{5}y}\Big|_3^\infty=-(e^{-\infty}-e^{-\frac{3}{5}})=e^{-\frac{3}{5}}=0.548811636$

(c).

若希望保固期內故障機率小於0.05，則$P(Y\leq T)=\int_0^T\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}y}dy=-e^{-\frac{1}{5}y}\Big|_0^T=-(e^{-\frac{T}{5}}-e^0)=1-e^{-\frac{T}{5}}=0.05$

$$e^{-\frac{T}{5}}=0.95\Rightarrow \ln e^{-\frac{T}{5}}=\ln 0.95\Rightarrow -\frac{T}{5}=\ln 0.95\Rightarrow T=-5\ln 0.95=0.256466471937753(\text{年})=93.61(\text{天})$$

保固期訂爲三個月似爲合理確保退貨比例在5%以內的期限