



- 兩向量  $\mathbf{a}$  與  $\mathbf{b}$  其夾角為  $\theta$ ，請問當  $\theta$  的角度範圍各為多少時，這兩向量的內積 (Inner product) 之值分別為  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ? (10 分)
- 考慮三維空間中一四面體 (Tetrahedron) 之三個相鄰邊緣分別以三個向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  來表示，若  $\mathbf{a} = i + 3k$ ,  $\mathbf{b} = 4i + 6j + 2k$ ,  $\mathbf{c} = 3i + 3j - 6k$ ，求此四面體之體積。(10 分)
- (a) 求下列矩陣之奇異值 (Eigen values) 與其分別對之應奇異向量 (Eigen vectors)，在什麼條件下矩陣只有一個奇異值？ (15 分)
 
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$
 (b) 請計算  $A^9$  若矩陣  $A$  表示如下。(15 分)
 
$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$
- 在一場考試中，考題包括 10 個選擇題，每題答對得 10 分，答錯倒扣 3 分。每題有四個答案選項，其中只有一個是正確的。如果經倒扣後總分低於零分，則以零分計。假設某位考生在考試中的習慣是「每一題都用猜的」。
  - 這位考生得分的期望值 (expected value) 是多少？ (8 分)
  - 這位考生考試及格 (得分  $\geq 60$ ) 的機率是多少？ (4 分)
  - 假設考試不及格的話，考生可要求重考，直到及格為止。則他平均需要考幾次才能及格？ {令 (b) 小題的答案為  $p$ ，本小題答案請用  $p$  表示} (4 分)
- 由  $-1$  到  $+3$  之間任意挑選一個數字  $x$ ，另外由  $-3$  到  $+1$  之間任意挑選另一個數字  $y$ ，計算下列事件的發生機率：
  - $x^2 < 0.25$ ; (4 分)
  - $\max(x, y) > 0$ ; (4 分)
  - $|x - y| < 1$ ; (4 分)
  - $xy > 0$ . (4 分)
- 已知  $X$  與  $Y$  為互相獨立之高斯分佈 (Gaussian distributed) 隨機變數，且兩者之平均值及標準差相同，各為  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ .
  - 寫出  $X$  與  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint pdf); (5 分)
  - 令  $T = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ ，寫出  $T$  的累積分配函數 (cumulative distribution function, CDF); (8 分)
  - 寫出  $T$  的機率密度函數 (pdf)。 (5 分)