

# 國立虎尾科技大學 101 學年度研究所（碩士班）考試入學試題

所別：資訊工程研究所

科目：考試科目 2（離算數學、線性代數）

注意事項：

- (1) 本試題共有十題，**任選五題作答**，每題二十分，合計一百分。  
(2) 請於答案卷上註明選答題號，若未註明選答題號及超過規定題數時，僅採計作答順序較前之題目計分。

## 計算問答題【離算數學】

1.

(a) Write the **recursive definition**  $F(n)$  for the **Fibonacci numbers**. (10 %)

(b) Based on the **recursive definition**  $F(n)$  of the **Fibonacci numbers**, prove that  $F(n+4) = 3F(n+2) - F(n)$  for  $n \geq 1$ . (10 %)

2. Prove that if  $n$  is an integer and  $n^3+n^2+n+7$  is odd, then  $n$  is even using **indirect proof**. (20%)

3. Prove using **mathematical induction** that  $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1) = n \times (n+1) \times (n+2) / 3$  whenever  $n$  is a positive integer. (20%)

4. Solve the **recurrence relation**  $a_n = c^* a_{n-1} + b$  with  $a_0 = d$ . Note that **b**, **c**, and **d** are constants. (20%)

5.

(a) Prove that if 101 integers are selected for the set  $S = \{1, 2, \dots, 200\}$ , then there are two integers such that one divides the others. (10%)。

(b) Determine the number of  $n$ -digital quaternary (**0, 1, 2, 3**) sequence in which there is never a **0** anywhere to the right of a **3**. (10%)

**【線性代數】**

6.  $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  為 4x4 矩陣.

- (a) 試求取 A 矩陣之行列式值；(8%)
- (b) 求  $|3A|$ ；(4%)
- (c)  $|A^2|$ ；(4%)
- (d)  $|2A^t A^{-1}|$ 。(4%)

7. 在向量空間  $\mathbb{R}^3$ ，向量  $u=(1,0,0)$  與  $v=(1, 0, 1)$ ：

- (a) 將  $v$  單位向量化(normalize)；(5%)
- (b) 求向量  $u$  與  $v$  之夾角；(5%)
- (c) 求與向量  $v$  正交(orthogonal)之所有向量；(5%)
- (d) 求  $v$  在  $u$  的投影量(projection)。(5%)

8.

- (a) 在向量空間  $\mathbb{R}^3$ ，證明  $\{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (4, 2, 1)\}$  是一組基底(basis)。(10%)
- (b) 在多項式函數  $P_2$ ，證明  $\{x^2+1, 3x-1, -4x+1\}$  線性獨立(linearly independent)。(10%)

9. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，請完成下列

- (a) 求  $A^{-1}$ ；(5%)
- (b) 求  $|A^{-1}|$ ；(5%)
- (c) 求  $A^{25}$  的特徵根(eigenvalues)及特徵向量(eigenvectors)。(10%)

10. 矩陣 A 如下

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ ，請計算並回答下列問題：

- (a) A 矩陣行空間(column space)的基底(basis) (10%)
- (b) 請利用逆矩陣，解下列線性方程式(10%)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 4y + z &= -2 \end{aligned}$$