

國立彰化師範大學 101 學年度碩士班招生考試試題

系所： 光電科技研究所

科目： 工程數學

☆☆請在答案卷上作答☆☆

共 1 頁，第 1 頁

1. 已知一週期函數 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ -x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

(a) 求其 Fourier Series。 (10%)

(b) 證明 $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ 。 (5%)

2. 解下列微分方程：

(a) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ ，其初值為 (1,1)。 (10%)

(b) $y'' - 3y' + 2y = \frac{-e^{2x}}{e^x + 1}$ 。 (10%)

3. 已知一矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) 求其 eigenvalues λ_1 及 λ_2 。 (3%)

(b) 求其所對應的 eigenvectors X_1 及 X_2 。 (4%)

(c) 求 A^{-1} 及其 eigenvalues。 (8%)

4. 請用拉普拉斯轉換(Laplace Transform)求解以下微分方程式：

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t},$$

初始條件為 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 。 (15%)

5. 請求解以下一維波方程式：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{初始條件為 } y(x,0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{2h}{L}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases} \text{ 以及 } \dot{y}(x,0) = 0,$$

邊界條件為 $y(0,t) = y(L,t) = 0$ ，其中 v 為波速。 (15%)

6. 計算以下之積分值：

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + 1}$ (10%)

(b) $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{x+1}, 0 < p < 1$ (10%)