國立高雄師範大學 101 學年度碩士班招生考試試題

系所別：數學系

科　目：高等微積分

※注意：1. 作答時請將試題題號及答案依序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。
2. 請以藍、黑色鋼筆或原子筆作答，以鉛筆或其他顏色作答之部份，該題不予計分。

1. Evaluate the following integrals.

（A）$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\ dx\ dy$.（7%）

（B）$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy$.（7%）

2.（A）Evaluate the limit $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x(1-x)}{k+(n-k)x}$, $x\in[0,1]$.（10%）

（B）Find the extreme values of $f(x)$ on $[0,1]$.（5%）

3. Label each statement as true or false. If a statement is true, prove it. If not , give reason of why it is false.

（A）$f(x)=x^2$ is uniformly continuous on $(-\infty\ ,\ \infty)$.（7%）

（B）If a function $f:[a,b]\to R$ is Riemann integrable , then there exists some point $c\in[a,b]$ such that $\int_a^c f(x)\ dx=\int_c^b f(x)\ dx$.（7%）

（C）If $\sum a_k$ converges , then $\sum (a_k)^2$ converges.（7%）

4. Let $E=\left\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$ be a set in $\mathbb{R}$. Prove that the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

is integrable on $[0,1]$ and evaluate the value $\int_0^1 f(x)\,dx$.（10%）

（背面有題）

系所別：數學系

科　目：高等微積分

5. If $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converges, prove that $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k^p}$ converges for all $p \ge 0$.（10%）

6. Suppose that $b > a > 0$. Prove that $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,dx = b-a$.（10%）

7. Find a closed form for each of the following series and the largest set on which this formula is valid.（10%）

（A）$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-2}$；　（B）$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{k+1}$；　（C）$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{k+1}(1-x)^k$.

8. Prove that the directional derivatives of

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

exist at $(0,0)$ in all directions u, but f is neither continuous nor differentiable at $(0,0)$.（10%）