國立臺灣師範大學 101 學年度碩士班招生考試試題

科目：工程數學（光機電系統組）　　　　　　適用系所：機電科技學系

注意：1.本試題共 2 頁，請依序在答案卷上作答，並標明題號，不必抄題。2.答案必須寫在指定作答區內，否則依規定扣分。

1. Find a continuous solution satisfying

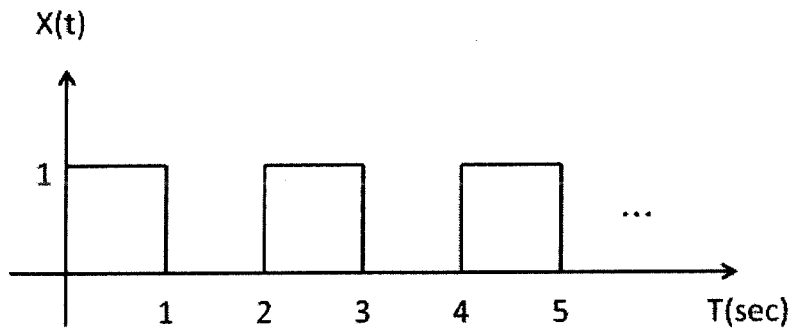$$y' + y = x(t),$$ where x(t) shown in Fig. 1 and plot the output y(t). （17 分）

Fig. 1

2. For the continuous-time signals x(t) and u(t) shown in Fig. 2, compute the convolution x(t)*u(t) for all t >=0 and plot your resulting signal. （16 分）

Fig. 2

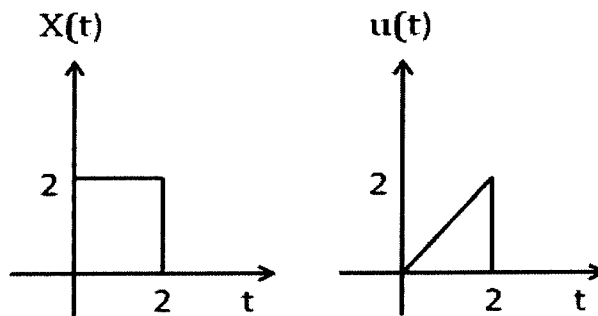3. Solve the general solution of the following system: （17 分）

$$x' - 2x - 6y = t - 7,$$
$$y' - 2x + 2y = 0$$

4. Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. （15 分）

   (a) Determine the rank of $\mathbf{A}$. （5 分）

   (b) Find the eigenvalues of $\mathbf{A}$. （5 分）

   (c) Find the inverse of $\mathbf{A}$. （5 分）

5. Consider the system of three equations in two unknowns $\begin{cases} 1x + 1y = 1, \\ 1x + 2y = 2, \\ 1x - 1y = 0. \end{cases}$ （10 分）

   (a) Is the system consistent? Give a detailed explanation. （5 分）

   (b) Find a solution (in the least-squares error sense) using the least squares method. （5 分）

6. Show that the given integral is independent of the path. Evaluate the integral. （10 分）

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz$$

7. Consider the following four points: $A(1, -2, -1)$, $B(4, 0, -3)$, $C(1, 2, -1)$ and $D(2, -4, -5)$. Find the shortest distance between two lines, $\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{BD}$. （10 分）

8. Let $f(x) = 1 - \cos x + \sum_{n=2}^{10} \sin nx$, and $g(x) = \sin x - \sum_{n=2}^{10} n^2 \cos nx$. Are the two functions orthogonal on the interval $(-\pi, \pi)$? Give a detailed explanation. （5 分）