

大同大學 101 學年度研究所碩士班入學考試試題

考試科目：工程數學

所別：機械工程研究所

第 全 頁

註：本次考試 不可以參考自己的書籍及筆記； 不可以使用字典； 不可以使用計算器。

1. (7%) 設 a, b, c 為實數，令 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ ，證明 $\det A = (a-b)(b-c)(c-a)$

2. (10%) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，求

(a) A 的特徵值(eigenvalue)與特徵向量(eigenvector)

(b) A 的秩, rank (A)

3. (6%) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 求 A 的反矩陣 (A^{-1})

4. (7%) 一個 $n \times n$ 矩陣稱為對稱矩陣(symmetric)如果其滿足 $B^T = B$ 性質；而如果一個矩陣滿足 $C^T = -C$ 性質，則其稱為反對稱(或斜對稱)矩陣(skew-symmetric)。利用 $2A = A + A^T + A - A^T$ 恆等式，證明任何 $n \times n$ 矩陣 A 可由一個 symmetric 矩陣和一個 skew-symmetric 矩陣組成。(所以任何矩陣皆具備 symmetric 及 skew-symmetric 特性)。(提示：證明 $A = \text{symmetric matrix} + \text{skew symmetric matrix}$)

5. (15%) 試解初始值問題

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x); y(0) = 0, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

6. (15%) 試解初始值問題

$$y'' + y = \tan(x); y(0) = 4, y'(0) = 3.$$

7. (5%) 求解 $\frac{1+2s}{s^2-6s+9}$ 的逆拉普拉斯轉換(inverse Laplace transform).

8. (10%) 求解滿足下列積分方程式之函數 $f(t)$

$$f(t) = 2t^2 + \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau.$$

9. (10%) 求解函數 $f(x)$ 之傅立葉級數(Fourier series).

$$f(x) = 5x^2 - \sin(x), -\pi \leq x \leq \pi.$$

10. (15%) 求解邊界值問題(boundary value problem)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ for } 0 \leq x \leq 2, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, u(2, t) = 0 \text{ for } t > 0$$

$$u(x, 0) = 3x \text{ for } 0 < x < 2.$$