

科目	工程數學	適用系所	光電學系	時間	100 分鐘
----	------	------	------	----	--------

※請務必在答案卷作答區內作答。

1. 若一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

- (a) 求本徵值(eigenvalue)及本徵向量(eigenvector)。(8%)
 (b) 求 A 之反矩陣。(5%)
 (c) 求 A 之對角化矩陣。(5%)
 (d) 求 e^A 值。(5%)
 (e) 承(a)題，試證明 A^{-1} 之本徵值為(a)之本徵值之倒數。(5%)

2. 一曲線方程式如下：

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, t \text{ 從 } -\pi/2 \text{ 至 } \pi/3, \text{ 試求其曲線之弧長。 (8\%)}$$

3. 有三向量, $\vec{A} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{C} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$

- (a) 求 \vec{A}, \vec{B} 兩向量及 \vec{A}, \vec{C} 兩向量間之夾角。(8%)
 (b) 若 $\vec{A} + \alpha\vec{B} \perp \vec{C}$, 則 $\alpha = ?$ (5%)

4. 試將下列週期函數展開成 Fourier series 的形式。

- (a) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ (10%)
 (b) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$ (8%)

5. 請求出下列微分方程式之解:

- (a) $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$ 。(5%) (b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$ 。(5%)
 (c) $x' = 3x + 3y + e^t, y' = 3x + 3y - 2e^t$ 。(5%)

6. (a) 試證明 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。(4%)

(b) 試證明 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (De Moivre 定理)。(4%)

7. 試求出下列偏微分方程式之解:

- (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 。(5%)
 (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$ 。(5%)