

- 一、 Let $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ defined by $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$. Prove that T is a linear transformation, and find bases for both $N(T)$ and $R(T)$. (20 分)
- 二、 Show that a subset W of a vector space V is a subspace of V if and only if $\text{span}(W) = W$. (20 分)
- 三、 Let G be a group and let a be one fixed element of G . Show that $H_a = \{x \in G \mid xa = ax\}$ is a subgroup of G . (10 分)
- 四、 (1) 對於一個 square matrix A 和其 eigenvalue λ ，何謂 the eigenspace of A for λ ? (10 分)
 (2) 證明 the eigenspace of A for λ 是一個 vector space。 (10 分)
- 五、 (1) 何謂一個 square matrix 的 determinant? (8 分)

$$(2) A = \begin{bmatrix} 99 & 77 & 55 & 33 & 11 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 5 & 8 \\ 11 & 33 & 55 & 77 & 99 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 99 & 77 & 55 & 33 & 11 \\ 9 & 6 & 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 11 & 33 & 55 & 77 & 99 \end{bmatrix}; \text{ 已知 } \det(A) = 9680,$$

求 $\det(B)$ 。 (7 分)

- 六、 (1) F 是一個 field，何謂 irreducible polynomials over F ? (5 分)
 (2) 證明 $x^3 - x + 2$ 是 irreducible over \mathbb{Z}_7 。 (10 分)