

國立臺灣海洋大學 103 學年度研究所碩士班招生考試試題

考試科目：工程數學

系所名稱：系統工程暨造船學系碩士班不分組

1. 答案以橫式由左至右書寫。2. 請依題號順序作答。

1. 對於方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} = 32te^{-4t} + 4$$

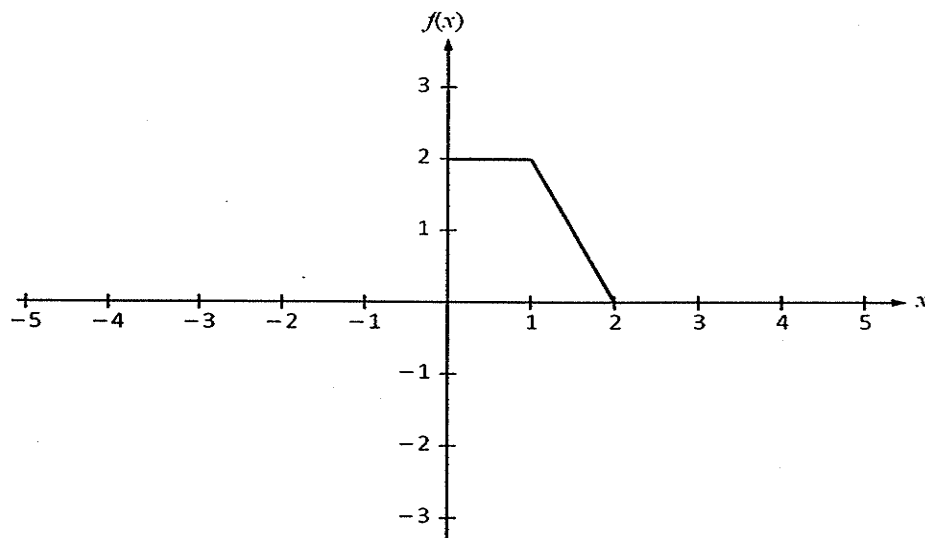
- (1) 《05%》試判斷是 over-damping、critical damping、抑或是 under-damping。
- (2) 《15%》試求出此方程式的解。

2. 對於向量場 $\mathbf{u}(x, y, z) = (yz + 1)\mathbf{i} + (xz - 2)\mathbf{j} + (xy + 1)\mathbf{k}$ ，

- (1) 《05%》試證明此向量場為一保守場 (conservative)。
- (2) 《10%》試求出此向量場的位勢函數 (potential function)。
- (3) 《05%》試求出此位勢函數在點 $(2, 1, -2)$ 處的梯度 (gradient)。
- (4) 《05%》試求出此位勢函數在點 $(2, 1, -2)$ 處沿著 $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 方向上的變化率。
- (5) 《05%》試求出此向量場在點 $(2, 1, -2)$ 處的散度 (divergence)。

3. 有關傅立葉級數 (Fourier series)，

- (1) 《10%》試舉一個無法作傅立葉級數展開的週期函數，並說明為什麼。
- (2) 《10%》若有一函數定義於 $[0, 2]$ 區間，其函數圖如下所示；我們擬以傅立葉餘弦級數來作半幅展開 (half expansion)，試畫出所需延展的週期函數 (至少要畫出三個周期，且坐標軸必須標示適當的數值，以能明確顯示函數的圖形)。此外，此一級數在 $[0, 2]$ 區間是否點點收斂於原函數值？為什麼？



4. 對於矩陣

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 《05%》試求出 \mathbf{A} 的秩 (rank)。
- (2) 《05%》若我們有聯立方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，其中 \mathbf{x} 為未知數向量、 \mathbf{b} 為常數向量，

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

是否可找到一個或多個 b_1 、 b_2 、 b_3 間的特定關係，使此方程組無解？

- (3) 《05%》試求出 \mathbf{A} 的所有特徵值。
- (4) 《15%》試求出 \mathbf{A} 的所有特徵向量。