

## 國立聯合大學 101 學年度碩士班考試招生

## 電子工程學系碩士班 入學考試試題

科目：                      工程數學                      第 1 頁共 1 頁

- (1) 微分方程式  $xy' - \frac{1}{x}y^2 - y = 0$ ，(a) 求通解；(b) 求滿足初始條件  $y(1) = 1$  的特解。  
[6%+4%=10%]
- (2) 微分方程式  $y'' - y' - 2y - 2 = 3e^{2x}$ ，(a) 求對應之齊次方程式的線性獨立解  $y_1(x)$  與  $y_2(x)$ ；(b) 求通解。  
[5%\*2=10%]
- (3) 使用拉氏轉換 (Laplace Transform)，求下列微分方程式之解  $y(t)$   
(i)  $y' + 4y = 4$ ； $y(0) = 2$   
(ii)  $y'' - 4y' + 13y = 3\delta(t - 2)$ ； $y(0) = 0, y'(0) = 6$   
其中  $\delta(t)$  為 Dirac delta function 或稱 unit impulse function。  
[6%+9%=15%]
- (4) 向量場  $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^{-z}\hat{\mathbf{i}} + 4xyz^2\hat{\mathbf{j}} + 3ye^{-z}\hat{\mathbf{k}}$ ，求 (a)  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ；(b)  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ；(c)  $\nabla \times \mathbf{F}$ 。  
[5%\*3=15%]
- (5) 考慮由正實數所組成的集合  $V$ 。假設  $V$  中的任一實數  $x$ ，可被視為一個向量，並以向量符號表示為  $\mathbf{x} = x$ 。吾人定義  $V$  中向量的加法 (addition of vectors) 為  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy$ ，以及純量乘法 (scalar multiplication) 為  $k\mathbf{x} = x^k$ 。證明上述的集合  $V$  為一個向量空間 (vector space)，即滿足向量空間的10個公理 (axioms)。  
[15%]
- (6) 三度向量空間的一個基底 (basis)  $B = \{ \langle 1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 2, 2 \rangle, \langle 2, 2, 1 \rangle \}$ 。利用 Gram-Schmidt 正交化程序，將  $B$  轉化為正範 (orthonormal) 基底  $C$ 。  
[10%]
- (7) 矩陣  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。求  $\mathbf{A}$  的特徵值 (eigenvalues) 及其對應之特徵向量 (eigenvectors)。如果可以的話，將  $\mathbf{A}$  對角化 (即，找到一個方陣  $\mathbf{P}$  使得  $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  為對角矩陣)。  
[15%]
- (8) 三維函數  $F(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$ 。求此函數在點  $(-2, 2, 1)$  處增加最快的方向為何？在此方向上的方向導數為何？  
[10%]