

1. 求解以下之初始值問題

$$y_1' = 3y_1 - 4y_2 + 20 \cos t$$

$$y_2' = y_1 - 2y_2$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 8 \quad (25\%)$$

2. 請用 Laplace transform 方法, 求解

$$x y'' + (1-x) y' + n y = 0$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (25\%)$$

(3) 考慮二維位移場 $\vec{u} = xy\vec{i} + (2x + y^2)\vec{j} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$.

設矩陣函數 $G(x, y) = \nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$, 其中 ∇ 代表梯度向量。

設 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, 已知 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 可由方程 $G\vec{a} = \vec{b}$ 解出 \vec{a} ,

但在曲線 $y = f(x)$ 上, 方程 $G\vec{a} = \vec{b}$ 無解, 請找出函數 $f(x)$ 。

(25%)

(4) 已知彈性力場 $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ 與彈性位能函數 $\Phi(x, y, z)$ 之關係為

$\vec{F} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}$, 已知 $\vec{F} = (1 + yz)\vec{i} + (xz - 1)\vec{j} + xy\vec{k}$ 請求出

函數 $\Phi(x, y, z)$ 。

(25%)

參考用

