1. 考慮一個 n×n 方陣(square matrix) **A**，回答下列問題：
   (a) (10%) 解特徵值問題(eigevalue problem，$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$)可用下列兩種方法：
      (I) 解 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$;
      (II) 解 $\det(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A}^{-1})=0$
      其中 ‘det(**X**)’ 表示計算矩陣 **X** 之行列式 (determinant), **I** 代表 n×n 之單位方陣(identity matrix)。解釋為何方法(I)可適用於任何矩陣，且說明若方法(II)可求得 **A** 的特徵值及特徵向量，則矩陣 **A** 有何限制?
   (b) (5%) 若方陣 **A** 為可逆(invertible)，說明 0 是否可以為 **A** 的特徵值?
   (c) (5%) 若方陣 **A** 為可逆(invertible)，則其秩(rank)須滿足何種條件?
   (d) (10%) 若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$，求 **A** 及 $\mathbf{A}^{11}$ 之特徵值及特徵向量。
   (e) (10%) 若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$，求相對應於 **A** 之對角矩陣(diagonal matrix)**D** 及 $\mathbf{D}^{-5}$。

2. Laplace 轉換為求解微分方程式的基本工具。
   (a) (5%) 令 $F(s)\equiv L[f(x,t)]$ 為函數 $f(x,t)$ 的 Laplace 轉換，寫出 Laplace 轉換的定義公式。
   (b) (5%) 利用(a)的定義，寫出 $L\left[\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]$ 的結果。
   (c) (5%) 令 $f_k(t-a)=\begin{cases}1/k, & a\le t\le a+k\\ 0 & , otherwise\end{cases}$，求 $f_k(t-a)$ 的 Laplace 轉換。
   (d) (5%) 令 $\delta(t-a)=\lim_{k\to 0} f_k(t-a)$，求 $\delta(t-a)$ 的 Laplace 轉換。
   (e) (10%) 若函數 $C(x,t)$ 滿足偏微分方程式：$\dfrac{\partial C}{\partial t}=-k\dfrac{\partial C}{\partial x}$，其中常數 $k>0$，且 $C(x,0)=0$，$C(0,t)=c_0$，利用(d)的結果轉換求解此偏微分方程式。

3. 考慮某純量溫度場 $T(x,y,z)=3e^{x}y+2\cos y\sin z+5x^{2}z$：
   (a) (5%) 求此溫度場在點$(0,\pi/2,0)$的梯度(Gradient)。
   (b) (5%) 求此溫度場沿著 **i**+**j**+**k** 方向，在點$(0,\pi/2,0)$的方向導數(Directional derivative)。
   (c) (5%) 求出在點$(0,\pi/2,0)$，此溫度場變化量最大之方向。
   (d) (5%) 求出此溫度梯度在點$(0,\pi/2,0)$的散度 (Divergence)。
   (e) (5%) 求出此溫度梯度在點$(0,\pi/2,0)$的旋度(Curl)。
   (f) (5%) 說明 $T(x,y,z)$是否為一個勢能函數(Potential function)。