1. 假設 $\hat{\theta}$ 為 θ 的估計量 (estimator)，且其機率質量函數 (probability mass function) 為

$$f(\hat{\theta};\theta)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n} & \hat{\theta}=\theta \\ \dfrac{1}{n} & \hat{\theta}=\theta+n\end{cases}$$

其中 n 為樣本數 (sample size)。請證明：

a) (10分) $\hat{\theta}$ 為 θ 的一致 (consistent) 估計量。

b) (10分) 當 $n\to\infty$ 時，其估計的誤差量 (bias) 並不會趨近於 0。

2. (10分) 假設 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 與 X 具有相同且獨立的分佈 (identical and independent distribution)，其中 X 具有常態分佈 $N(\theta,\sigma^2)$，且 σ^2 為已知常數。請找出下列統計量的最小變異不偏估計量 (minimum variance unbiased estimator)：

$$\Pr(X\le t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\Phi\left(\frac{t-\theta}{\sigma}\right)$$

3. 假設 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 與 X 具有相同且獨立的分佈，其中 X 的機率密度函數 (probability density function) 為

$$f(x;\theta)=\frac{x}{\theta}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\},\quad x\ge 0,\quad \theta>0$$

a) (10分) 請找出 θ 的充分統計量 (sufficient statistic)。

b) (10分) 請找出 θ 不偏估計量的 Cramer-Rao 下界 (Cramer-Rao lower bound)，並找出那一個不偏估計量可以達到這個下界。

4. 假設 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 為一組隨機樣本 (random sample)，其共同的機率密度函數為

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & -\dfrac{\theta}{2}\le x\le\dfrac{\theta}{2} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

a) (10分) 請找出 θ 的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。

b) (10分) 請找出一個 θ 的 95% 信賴區間 (confidence interval)。

5. 有一個科學家擲一個銅板6次，得到 (0, 0, 0, 0, 0, 1) 的結果，其中1代表擲出正面，而0則代表擲出反面。假設每次擲出正面的機率為 θ。科學家想要測試以下假設

$$H_0:\theta=\frac{1}{2} \quad H_1:\theta=\frac{1}{3}$$

a) (15分) 請推導出顯著水準 (significant level) $\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 的最強力檢定 (most powerful test)，並得出此最強力檢定的檢定力 (power)。又科學家所擲出的結果 (0, 0, 0, 0, 0, 1) 是支持 H_0 或者 H_1？

b) (15分) 科學家後來說，他得到以上結果的方式為，擲銅板直到得到正面才停止。則在此實驗方式下，什麼才是顯著水準 $\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 的最強力檢定？又此最強力檢定的檢定力為何？科學家所擲出的結果 (0, 0, 0, 0, 0, 1) 是支持 H_0 或者 H_1？