國立交通大學 103 學年度碩士班考試入學試題

科目：工程數學(3111)　　考試日期:103 年 2 月 15 日 第 1 節

系所班別：土木工程學系　　組別：土木系丁組一般生　　第 1 頁,共 1 頁

【可使用計算機】＊作答前請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證之所組別與考科是否相符！！

1. Answer the following questions (15%):
   (a) How do you determine whether n functions, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ are linearly independent or linearly dependent? (State the definition and show one method)
   (b) How do you determine whether n vectors, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ are linearly independent or linearly dependent? (State the definition and show one method)
   (c) Find a basis of solutions for the following differential equation:
   $4y''+\pi^2 y=0$

2. Find the general solution for the following system (10%):

$$y_1'=2y_1+2y_2$$
$$y_2'=5y_1-y_2$$

3. Solve the initial value problem (10%):

$y''+3y'+2y=f(t)$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$

in which $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ 0, & otherwise\end{cases}$

4. Find a basis of solutions of the following differential equations by Frobenius method (10%):

$$(x+2)^2y''+(x+2)y'-y=0$$

5. Solve the equation: $y(t)=1-\int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau$ (10%)

6. Find the Fourier series of the following function $f(x)$: (10%)

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{if } -1<x<1\\ 2-x & \text{if } 1<x<3\end{cases}$$

7. 試說明反矩陣存在的條件(the existence of the inverse of a matrix)，並證明之。(15%)

8. 某區域地表下有一明顯的層面（可視為傾斜面），為決定此層面的空間方位而進行三孔地質鑽探(A,B,C)，A 孔（地表高程 550 公尺）與 B 孔（地表高程 450 公尺）呈東西排列，B 孔位於 A 孔的東側，二孔相距 400 公尺，C 孔（地表高程 410 公尺）則位於 B 孔北側 300 公尺處。由鑽探岩心檢視發現 A 孔於 150 公尺深、B 孔於 100 公尺深、C 孔於 110 公尺深處鑽得此層面。試利用代數方法(vector algebra)求取此層面的走向及傾角。(10%) (提示：空間座標、Vector Product、Inner Product)

9. 試計算以下二曲線於點 P 的單位垂直向量(unit normal vector) (10%)
   (a) $X^2+y^2=100$, P: (6,8)
   (b) $Z=(x^2+y^2)^{1/2}$, P: (3,4,5)