淡江大學 103 學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系　　　　　　　　科目：基礎數學(含微積分、線性代數)

考試日期：3 月 2 日(星期日) 第 2 節　　　　　　本試題共　7　大題，　1　頁

1.請證明$\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$，$\forall x\in R$　(10%)

2.請判斷下列級數為收斂或發散，須寫出判斷原因(使用的定理或性質)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)$　(5%)　　(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$　(5%)

3.請算出下列的值

(a) $\int_0^1 x^2e^x dx$　(10%)　　(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{2x}\frac{dt}{1+t^2}$　(10%)

4. 下列極限值是否存在?若存在請算出其極限值

(a) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$　(5%)　　(b) $\lim_{x\to 1} g(x)$，此處 $g(x)=\begin{cases}1+x^3, x<1\\ 3, x=1,\\ 4-2x, x>1\end{cases}$　(5%)

5. 若矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&1&7\\1&2&0\\2&3&10\end{bmatrix}$,

(a)利用線性獨立(linearly independent)的定義來判斷矩陣A 的行向量是否為線性獨立? (10%)

(b)求A矩陣的秩(rank)為?零核維數(nullity)為? (5%)

(c) $S=\{(1,1,2),(1,2,3),(7,0,10)\}$ 是否為R^3的一組基底(basis)?為什麼? (5%)

6.若A為一 $n\times n$ 實數對稱矩陣，λ_i為A的特徵值(eigenvalue,不需全相異),試證明

(a) $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，此處 tr 代表跡數(trace)　(10%)

(b) $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，此處 det 代表行列式(determinant) (10%)

7.試證明若k為一正整數，λ為矩陣A的特徵值，$\mathbf{x}$ 為對應的特徵向量(eigenvector)，則λ^k為 A^k 的特徵值，$\mathbf{x}$ 為對應的特徵向量。(10%)