

# 國立臺灣師範大學九十七學年度碩士班考試入學招生試題

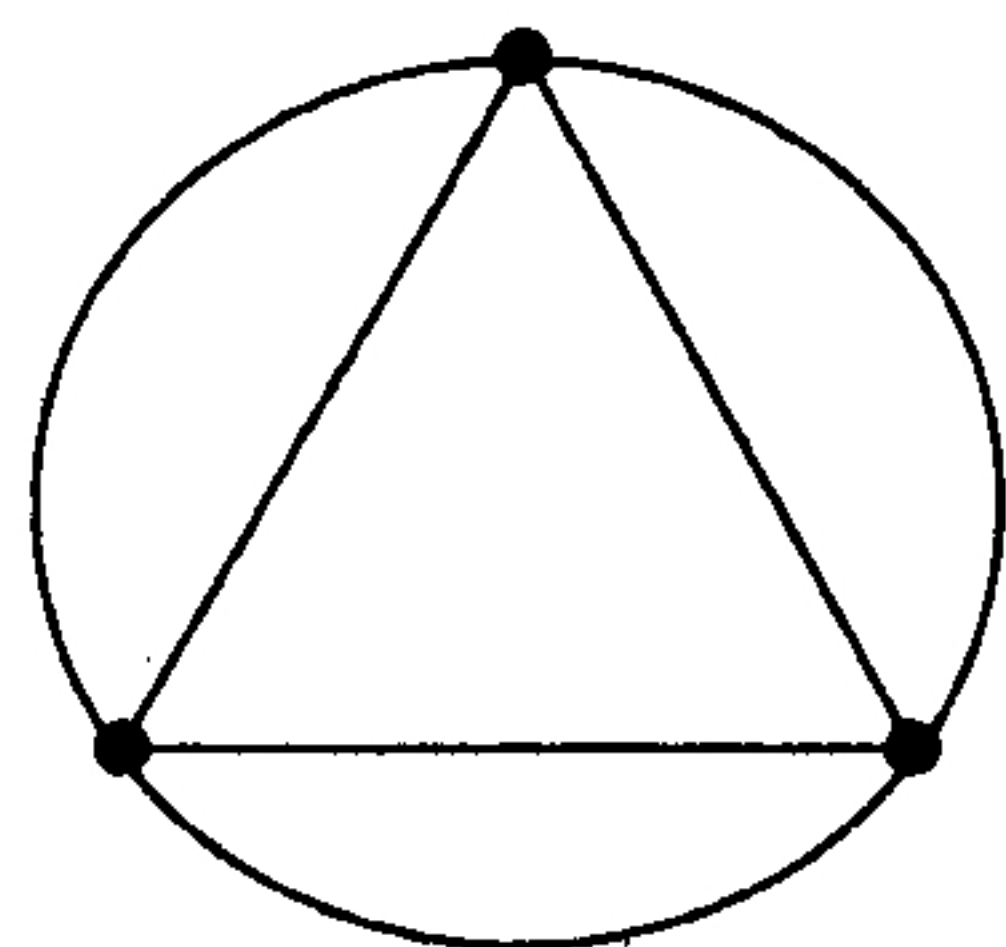
數學教育概論 科試題 (數學系用, 本試題共 2 頁)

叔守教育組

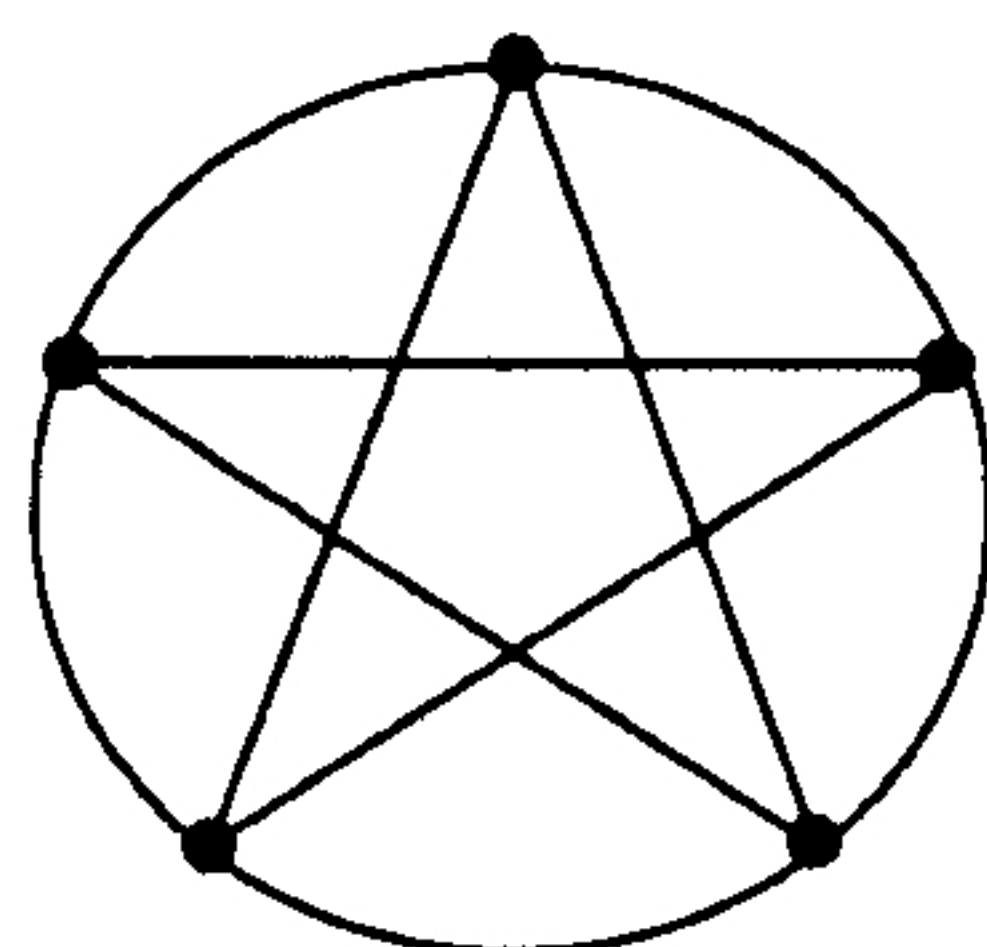
注意: 1. 依次序作答, 只要標明題號, 不必抄題。  
2. 答案必須寫在答案卷上, 否則不予計分。

1. 有一個「針與線」的數學問題如下: (20 分)

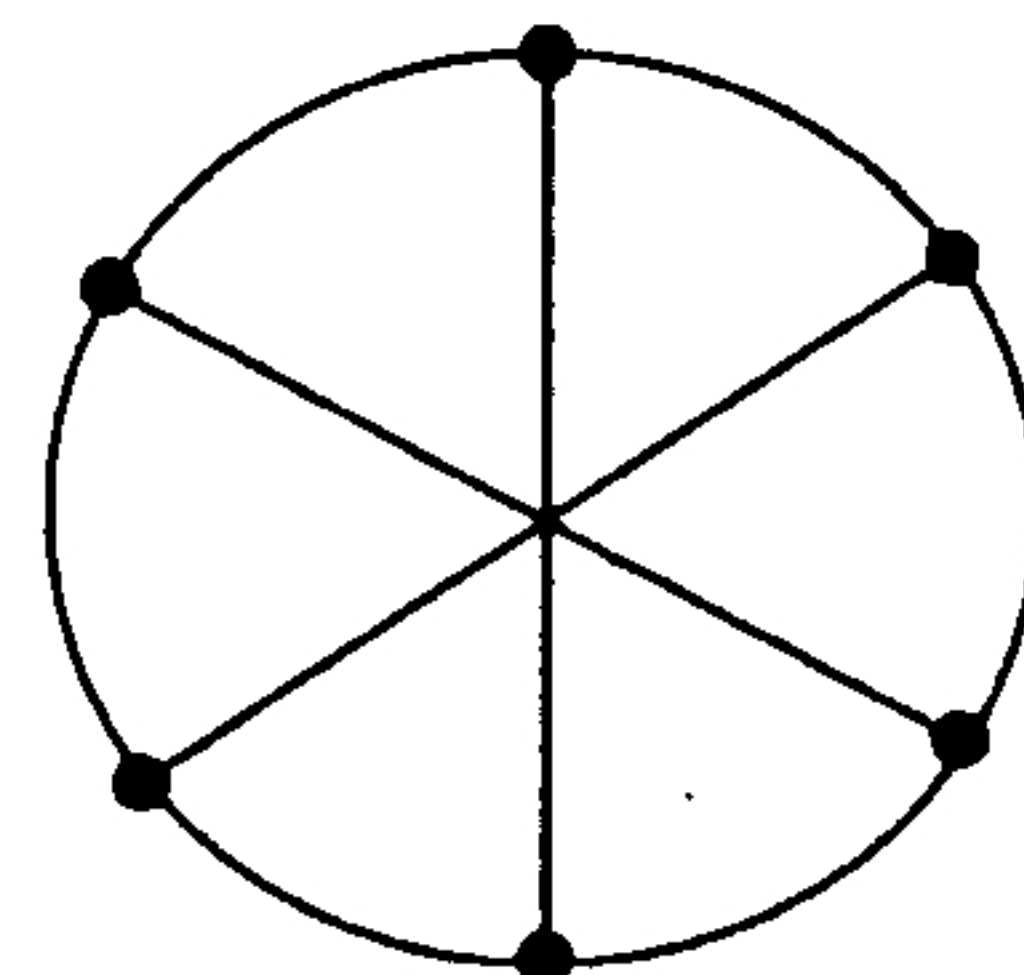
若把一些針釘在圓上, 兩相鄰針之間的距離稱為「1 個間隔」。現在拿一條線按著順時鐘方向, 每隔相同數目的間隔將線靠在針上, 直到此線繞回第一根針為止(如圖一)。當線繞回第一根針時, 若還有沒靠到線的針, 則拿第二條線以相同的方式繼續作下去(如圖三)。例如, 用線靠 5 根針, 若每次相隔 2 個間隔時, 只需要一條線(如圖二); 用線靠 6 根針, 若每次相隔 3 個間隔時, 需要用到三條線(如圖三)。



3 根針, 1 間隔  
(圖一)



5 根針, 2 間隔  
(圖二)



6 根針, 3 間隔  
(圖三)

試求: 需要用到線數的一般式(提示: 在有限的考試時間裡, 你未必能夠解得出來, 所以請儘量寫下自己的想法與算法)。

2. 請依據你個人的想法及求解第 1 題時的經驗, 回答下列問題:

- (1) 何謂數學理解(mathematical understanding)? 它有哪些特性? (10 分)
- (2) 何謂數學概念(mathematical concepts)? 它有哪些特性? (10 分)
- (3) 何謂數學符號(mathematical symbols)? 它有哪些功能? (10 分)

3. 以下為高一下學期師生在討論解二次不等式問題時的一段場景：

師(在黑板上邊寫邊說)：已知  $y=f(x)$  為二次多項式，且  $f(-5)=0$ ， $f(3)=0$ 。試求  $f(x) \geq 0$  的解。

甲生：老師，是要算  $x$ ，還是要算  $y$  的範圍？

師：求  $x$  的範圍，使得  $y=f(x) \geq 0$ 。

甲生：那麼，不知道  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是多少，怎麼因式分解呢？

師：看一看，有沒有其它已知條件？

甲生(看著黑板思考約一分鐘)：喔！我大概知道怎麼解了，要利用  $f(-5)=0$ ， $f(3)=0$ 。

師：那你上來做做看。

甲生(在黑板寫出一段作法)：令  $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ，代  $x=-5$ ， $25a-5b+c=0$ ，代  $x=3$ ， $9a+3b+c=0$ 。

甲生(望著老師)：這樣要解  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，還是不夠條件！

師：一定要同時解出  $a$ 、 $b$ 、 $c$  才能作嗎？

甲生(再度注視著黑板約一分鐘，喊出『可以直接得到因式分解』後，繼續在黑板寫出另一段作法)： $y=f(x)=(x+5)(x-3) \geq 0$ ，所以  $x \leq -5$ ， $x \geq 3$ 。

師：同學一齊來討論看看解答是不是正確。

請參考上述教學場景回答下列問題：

(1) 依據 Polya 所提出的解題四步驟(瞭解題意、擬訂計畫、執行計畫、回顧解答)論述甲生的解題歷程。(15分)

(2) 從「後設認知」理論觀點，分析甲生在解題過程中的數學思維。(15分)

(3) 分析甲生在解此二次不等式問題的過程中，所產生的困惑與迷失概念；

若你是甲生的數學教師，將如何建構鷹架(scaffolding)以支助學生解題？(20分)