國立交通大學 97 學年度碩士班考試入學試題

科目：微積分與線性代數(4091)　　一般在職　　考試日期：97 年 3 月 9 日 第 1 節

系所班別：統計學研究所　　組別：統計所　　第 1 頁，共 1 頁

*作答前請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證之所組別與考科是否相符！！

1. 30% 是非題：<u>不需寫原因</u>，答對一題得五分，答錯一題扣五分，不答沒分。

   (1) 假如 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，則 $\sum a_n$ 收斂。

   (2) 假如 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$，則 $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$。

   (3) 假如 $\sum a_n$ 發散，則 $\sum |a_n|$ 也發散。

   (4) 所有的連續函數都有反微分 (antiderivative) 存在。

   (5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$

   (6) 假如 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，則 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 連續且可微。

2. 10% 求 $\frac{d}{dx}\left|x^2+x\right|$.

3. 10% 求 $\frac{d^2}{dx^2}\int_3^x\left(\int_{\tan t}^{3}\sqrt{2+\cos u}\,du\right)dt$.

4. 10% 求 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$ 之值。

5. 20% 假設矩陣 M 滿足

   (1) $MM^{\mathrm{T}} = I$ (2) $\overline{v_1}M = (t_{11}, t_{12}, 0, 0)$ (3) $\overline{v_2}M = (t_{21}, t_{22}, 0, 0)$，

   其中 $\overline{v_1} = (1,2,3,4)$, $\overline{v_2} = (1,1,1,1)$，求 $\left|\det\begin{vmatrix} t_{11}, t_{12} \\ t_{21}, t_{22}\end{vmatrix}\right|$.

6. 20% 假設 V 爲次數小於 3 的實係數多項式所形成的線性空間，T 爲 V 到 V 的線性運算子 (linear operator) 滿足 $T(ax^2+bx+c) = cx^2+(c+b)x+a$。請問 T 可否對角化？如果可以，請找出一組基底使得 T 的表示法爲一對角矩陣。